n 个一维同频简谐振动合成的简易推导

经本合
（重庆市巴南区教师进修学校　重庆　401320）
胡安良
（重庆市实验中学校　重庆　401320）

（收稿日期：2018－03－12）

在力学、声学、电磁学和光学中都会遇到一维同频简谐振动的合成.一般多用旋转矢量法处理两个一维同频简谐振动的合成，得到合振动的振幅与初相位公式[1].对于 n 个一维同频简谐振动的合成，文献[2]认为“旋转矢量合成法虽然原则上可行，但计算过程较为繁复，甚至不可行”，故另辟蹊径用待定参数法研究.事实上，文献[2]的求解过程太繁琐冗长，改用传统的旋转矢量法，可以简捷地得到答案，推导篇幅不及原方法的四分之一.

如图1所示，设某质点同时参与 x 轴上的 n 个角频率都为 ω 的简谐振动，其中第 i 个振动的位移为 $x_i = A_i\cos(\omega t+\varphi_i)$，$t=0$ 时刻其对应的矢量为 $\boldsymbol{OP}_i$，A_i，φ_i 是它的振幅和初相位.由于所有矢量都以相同的角速度 ω 逆时针匀速旋转，从而所有矢量保持相对位置不变.故只需求在 $t=0$ 时的合矢量 $\boldsymbol{OP}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{OP}_i$，其长度 A 为合振幅，仰角 φ 为合振动的初相位，最终可得合振动的位移为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

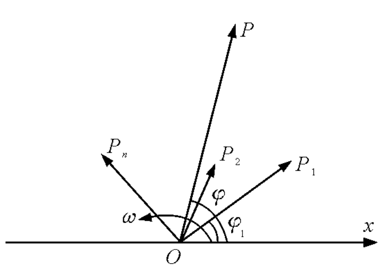

图1　情境图

由于“合矢量的分量等于各矢量的分量的代数和”，不难求出合振幅

$$A=\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i\Big)^2}\qquad(1)$$

注意到

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i\Big)^2=$$
$$\sum_{i=1}^{n}A_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1\neq i}^{n}A_iA_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_iA_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)$$

最后一式因为

$$A_iA_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)=\begin{cases}A_i^2=A_j^2,(i=j)\\A_jA_i\cos(\varphi_j-\varphi_i),(i\neq j)\end{cases}$$

所以 $A_iA_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)$ 对于 i，j 下标具有交换对称性，故合振幅也可写为

$$A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_iA_j\cos(\varphi_i-\varphi_j)}\qquad(2)$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i=0$，则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i$ 的正负可确定合振动初相位 $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i\neq 0$，则有

$$\tan\varphi=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i}\qquad(3)$$

由此得到在 $(-\pi,\pi]$ 上 φ 的两个值后，再由 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i$ 的正负即可确定 φ 值.这样便完整求出了合振动的振幅和初相位.

不难发现，上面的式(1)～(3)与文献[2]的结果是一致的，但方法却简单直观得多.

参考文献

1　赵凯华，罗蔚茵.新概念物理教程(力学)(第2版).北京：高等教育出版社，2004.264～265
2　周国全，祁宁.n 个简谐振动合成的待定参数法.物理通报，2018(3)：20～22