“逐差法”不仅可以求加速度

李伟康　朱小勤

（芜湖市第一中学　安徽 芜湖　241000）

（收稿日期：2018－04－08）

摘　要：“逐差法”是求匀变速直线运动加速度最常用的方法，经过不断强化使用，教师和学生已经耳熟能详．然而，对“逐差法”的内涵和外延，很多学生却较为陌生．本文将就这一问题展开分析讨论，并给出其拓展应用．

关键词：逐差法　加速度　劲度系数　电池组　内阻

1　“逐差法”的内涵和意义

【例 1】（2006 年高考重庆卷第 22 题）某同学用如图 1 所示装置测量重力加速度 g，所用交流电的频率为 50 Hz，在所选纸带上取某点为 0 号计数点，然后每 3 个点取一个计数点，所有测量数据及其标记符号如图 2 所示．该同学用两种方法处理数据（T 为相邻两计数点的时间间隔）：

方法 A：由 $g_1=\dfrac{S_2-S_1}{T^2}$，$g_2=\dfrac{S_3-S_2}{T^2}$，…，$g_5=\dfrac{S_6-S_5}{T^2}$，取平均值 $\bar{g}=8.667\ \mathrm{m/s^2}$；

方法 B：由 $g_1=\dfrac{S_4-S_1}{3T^2}$，$g_2=\dfrac{S_5-S_2}{3T^2}$，$g_3=\dfrac{S_6-S_3}{3T^2}$，取平均值 $\bar{g}=8.673\ \mathrm{m/s^2}$．

百分差

$$E_{\bar{R}}=\left|\frac{\bar{R}-R_{标}}{R_{标}}\right|\times 100\%=$$

$$\frac{(868.3-855.1)\times 10^{-3}}{855.1\times 10^{-3}}\times 100\%=1.5\%$$

5　创新点

（1）通过无线设备遥控测量牛顿环，使系统简便且易于操作．

（2）对于实验中的条纹数目是经过 CMOS 镜头，将条纹清晰地显示在电脑屏幕上，利用光敏模块进行计数条纹．系统可记录每环数据并在液晶显示屏上显示，避免繁琐的数据记录过程，减少眼疲劳，方便浏览．

（3）利用角编码器进行测量位移，这样就可以避免回程误差．

（4）系统通过所测数据自动计算牛顿环半径，优化了实验步骤，提高了准确度，减少了误差．

（5）断电自动保存实验所测数据，免去因线路故障丢失数据．

6　结论

改进后的装置与原装置相比，百分差由 2.3% 降为了 1.5%，误差减少了 0.8%，相对不确定度由 0.68% 降为 0.53%．改进后优化了实验步骤，系统简便且易于操作，减少眼疲劳带来实验误差，有效避免了回程误差，实验数据更加准确，效率高效．

参考文献

1　吴福根，周誉昌．大学物理实验．北京：高等教育出版社，2007．99 ～ 105

2　马国利，郭洪岩，刘伟波．大学物理实验教程．东营：中国石油大学出版社，2010．79

4　姚启钧．光学教程．北京：高等教育出版社，2002．72 ～ 78

5　毕海，李国栋，李永新，等．绝对式旋转编码器用于线位移测量的研究．传感器技术，1998(6)：238 ～ 256

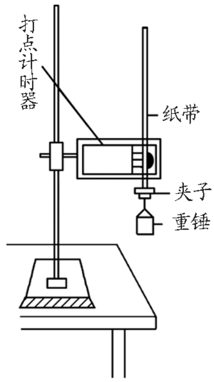

图 1　例 1 题图

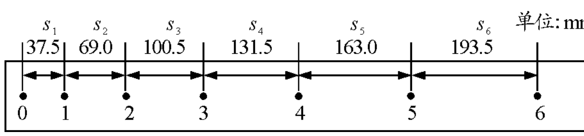

图 2　纸带

从数据处理方法看,在 s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6 中,对实验结果起作用的,方法 A 中有________;方法 B 中有____________________. 因此,选择方法_______(A 或 B) 更合理,这样可以减少实验的_________(系统或偶然) 误差. 本实验误差的主要来源有____________________(试举出两条).

答案:s_1,s_6;s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6;B;偶然;阻力(空气阻力,振针的阻力,限位孔的阻力,复写纸的阻力等),交流电频率的波动,长度测量,数据处理方法等.

“逐差法”是一种逐一相减的数据处理方法,通过大量数据的使用和逐一相减,使正负误差尽量抵消,从而起到减小物理实验测量数据偶然误差的作用. 例 1 中由于方法 A 中对实验结果起作用的只有 s_1 和 s_6,对减小偶然误差没有帮助,而方法 B 中对实验结果起作用的是全部数据,正负误差抵消较为充分,起到了有效减小偶然误差的作用,所以方法 B 更合理. 因此,在物理实验数据处理上,方法 B 才真正体现“逐差法”的内涵. 而其意义正是“充分减小偶然误差”.

“逐差法”的操作要领是尽量充分地利用已测量数据,通过观察进行逐差组合,分组求解后再求平均值. 对于连续的偶数段数据,可以将全部数据分成连续的“两大段”,再行求解.

2　“逐差法”的思想根源和等效表现

“逐差法”的思想根源是“多次测量求平均值”以减小偶然误差,理解了这一点,学生就不至于只拘泥于“逐差法”的形式,才能在非一般情况下做到灵活变通,准确求解.

“逐差法”的等效处理方式是图像法(如“逐差法”求加速度和利用 $s-T^2$ 的斜率求加速度是等效的),两者都能达到充分抵消正负误差的效果. 相比之下,“逐差法”求解快速,而图像法直观,容易发现、剔除个别错误数据.

3　“逐差法”的拓展应用和灵活处理

在线性关系的数据处理上,“逐差法”可以拓展到中学各种实验的数据处理中,只是为了方便应用,可能要对数据的关系做些形式的变通.

3.1　“舍小取偶逐差法”

【例 2】(2017 年高考全国 Ⅰ 卷第 22 题) 某探究小组为了研究小车在桌面上的直线运动,用自制“滴水计时器”计量时间. 实验前,将该计时器固定在小车旁,如图 3 所示. 实验时,保持桌面水平,用手轻推一下小车. 在小车运动过程中,滴水计时器等时间间隔地滴下小水滴,图 4 记录了桌面上连续的 6 个水滴的位置.(已知滴水计时器每 30 s 内共滴下 46 个小水滴)

(1) 由图 4 可知,小车在桌面上___________(填“从右向左”或“从左向右”) 运动的.

(2) 该小组同学根据图 4 的数据判断出小车做匀变速运动. 小车运动到图 4 中 A 点位置时的速度大小为______ m/s,加速度大小为______ m/s². (结果均保留 2 位有效数字)

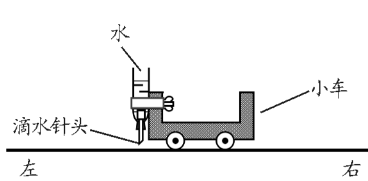

图 3　例 2 题图

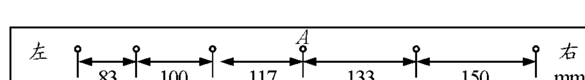

图 4　小水滴位置

解析:现只分析加速度的“逐差法”求解.

一般有以下 3 种处理方式,均为“奇段取偶”,只采用部分数据.

Ⅰ. 舍掉第一段,变为偶数段

$$a=\frac{(s_4+s_5)-(s_2+s_3)}{(2T)^2}=$$

$$0.037\ 125\ \mathrm{m/s^2}\approx 0.037\ \mathrm{m/s^2}$$

Ⅱ. 舍掉最后一段,变为偶数段

$$a=\frac{(s_3+s_4)-(s_1+s_2)}{(2T)^2}=$$

$$0.037\ 687\ 5\ \mathrm{m/s^2}\approx 0.038\ \mathrm{m/s^2}$$

Ⅲ. 舍掉中间一段,变为偶数段

$$a=\frac{(s_4+s_5)-(s_1+s_2)}{6T^2}=$$

$$0.037\ 5\ \mathrm{m/s^2}\approx 0.038\ \mathrm{m/s^2}$$

那么,标准答案应该给多少呢? 笔者在网上搜索的结果基本上都是 $0.037\ \mathrm{m/s^2}$. 若如此,则处理方式 Ⅱ 和 Ⅲ 就是错误的. 那么,若标准答案给的是 $0.037\ \mathrm{m/s^2}$ 或 $0.038\ \mathrm{m/s^2}$ 呢?

我们再看一下其他处理方式,即在 5 段数据中任选两段求解

$$a=\frac{s_2-s_1}{T^2}=0.038\ 25\ \mathrm{m/s^2}=0.038\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a=\frac{s_4-s_3}{T^2}=0.036\ \mathrm{m/s^2}$$

……

可见,若标准答案有 $0.038\ \mathrm{m/s^2}$,则不能排除考生是通过 $a=\frac{s_2-s_1}{T^2}$ 所求得,即没有达到考查“逐差法求加速度”的目的. 如此,标准答案只能给出 $0.037\ \mathrm{m/s^2}$ 这仅有的一个数值. 从而也就给出了标准求解方法,即数据处理方式 Ⅰ 这也是有一定道理的,一般来说,第一段数值最小,相对测量误差较大.

那么,若采用“全数据处理”方式又会分别得出什么结果呢?

Ⅳ. 重复使用“小数据”段

$$a=\frac{(s_3+s_4+s_5)-(2s_1+s_2)}{8T^2}=$$

$$0.037\ 687\ 5\ \mathrm{m/s^2}\approx 0.038\ \mathrm{m/s^2}$$

Ⅴ. 重复使用“大数据”段

$$a=\frac{(s_4+2s_5)-(s_1+s_2+s_3)}{8T^2}=$$

$$0.037\ 406\ 25\ \mathrm{m/s^2}\approx 0.037\ \mathrm{m/s^2}$$

由此可以看出,命题者除了旨在考查“逐差法”外,还兼顾考查了对误差来源的认识和减小的多种途径的理解和处理.

我们可以把由连续奇数段数据求解相关物理量的方法概括为“舍小取偶逐差法”.

3.2 “凑和逐差法”

【例 3】(2010 年高考重庆卷第 22 题)某同学用打点计时器测量做匀加速直线运动的物体的加速度,电源频率 $f=50$ Hz,在纸带上打出的点中,选出零点,每隔 4 个点取 1 个计数点,因保存不当,纸带被污染,如图 5 所示,A,B,C,D 是依次排列的 4 个计数点,仅能读出其中 3 个计数点到零点的距离:$s_A=16.6$ mm,$s_B=126.5$ mm,$s_D=624.5$ mm.

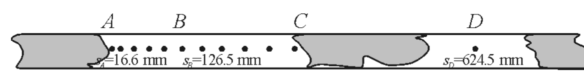

图 5 纸带

若无法再做实验,可由以上信息推知:

(1) 相邻两计数点的时间间隔为______ s;

(2) 打 C 点时物体的速度大小为______ m/s(取 2 位有效数字);

(3) 物体的加速度大小为______(用 s_A,s_B,s_D 和 f 表示).

解析:现只分析加速度的“逐差法”求解. 易知,AB 段距离 $s_{AB}=s_B-s_A$,BD 段距离

$$s_{BD}=s_D-s_B$$

$$a_1=\frac{s_{BC}-s_{AB}}{T^2}$$

$$a_2=\frac{s_{CD}-s_{AB}}{2T^2}$$

$$a=\frac{a_1+a_2}{2}$$

但考虑已知数据的局限性,根据上述做法很难得出加速度的表达式,现灵活处理如下

$$s_{BC}-s_{AB}=aT^2$$

$$s_{CD}-s_{AB}=2aT^2$$

两式相加后,得

$$(s_{BC}+s_{CD})-2s_{AB}=3aT^2$$

即 $$s_{BD}-2s_{AB}=3aT^2$$

亦即 $$a=\frac{s_D-3s_B+2s_A}{3T^2}$$

又
$$T = 5 \cdot \frac{1}{f} = \frac{5}{f}$$

所以
$$a = \frac{(s_D - 3s_B + 2s_A) f^2}{75}$$

3.3 **“倒数逐差法”**

【例 4】(2014 年高考浙江卷第 21 题) 在“探究弹力和弹簧伸长的关系”时，某同学把两根弹簧如图 6 连接起来进行探究.

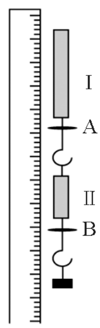

图 6　例 4 题图

(1) 某次测量如图 7 所示，指针示数为______ cm.

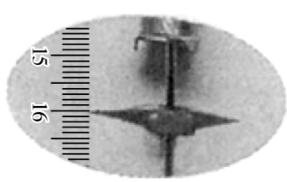

图 7　测量示数

(2) 在弹性限度内，将 50 g 的钩码逐个挂在弹簧下端，得到指针 A，B 的示数 L_A 和 L_B 如表 1 所示. 用表中数据计算弹簧Ⅰ的劲度系数为______ N/m(重力加速度 $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$). 由表 1 中数据______(填“能”或“不能”) 计算出弹簧 Ⅱ 的劲度系数.

表 1　指针示数

钩码数	1	2	3	4
L_A/cm	15.71	19.71	23.66	27.76
L_B/cm	29.96	35.76	41.51	47.36

解析：现只针对弹簧 Ⅰ 的劲度系数的求解做如下讨论(为便于比较差异，以下保留 3 位小数).

(1) 单组数据求解

$$\kappa_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta x_1} = \frac{mg}{L_2 - L_1} = 12.500\ \mathrm{N/m}$$

$$\kappa_2 = \frac{\Delta F_2}{\Delta x_2} = \frac{mg}{L_3 - L_2} = 12.658\ \mathrm{N/m}$$

$$\kappa_3 = \frac{\Delta F_3}{\Delta x_3} = \frac{mg}{L_4 - L_3} = 12.195\ \mathrm{N/m}$$

三者取平均值

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}{3} = 12.451\ \mathrm{N/m}$$

$$\kappa_4 = \frac{2mg}{L_3 - L_1} = 12.579\ \mathrm{N/m}$$

$$\kappa_5 = \frac{2mg}{L_4 - L_2} = 12.579\ \mathrm{N/m}$$

$$\kappa_6 = \frac{3mg}{L_4 - L_1} = 12.448\ \mathrm{N/m}$$

(2)“逐差法” 求解

由于 $\kappa_1 = \frac{2mg}{L_3 - L_1}$，$\kappa_2 = \frac{2mg}{L_4 - L_2}$，$\kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = 2mg\left(\frac{1}{L_3 - L_1} + \frac{1}{L_4 - L_2}\right)$，直接取平均值不便于计算，通过观察，不妨先求劲度系数的倒数 $\frac{1}{\kappa}$，进而再求劲度系数 κ.

$$\frac{1}{\kappa_1} = \frac{L_3 - L_1}{2mg} \qquad \frac{1}{\kappa_2} = \frac{L_4 - L_2}{2mg}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{(L_3 + L_4) - (L_1 + L_2)}{2 \times 2mg} = 0.08\ \mathrm{m/N}$$

所以
$$\kappa = 12.500\ \mathrm{N/m}$$

由上述不同的求解方法，可以看出所求结果大小呈现多样性，这是偶然误差的表现，而“逐差法” 所求结果在各个数值中居中位，这是偶然误差减小的体现.

3.4 **“整体逐差法”**

【例 5】某研究性学习小组利用伏安法测定某一电池组的电动势和内阻(电动势约为 6 V，内阻约为 2 Ω)，实验原理如图 8 所示，其中，虚线框内为用灵敏电流计 Ⓖ 改装的电压表Ⓥ，Ⓐ 为标准电流表，E 为待测电池组，S 为开关，R 为滑动变阻器，R_0 是标准阻值为 4.0 Ω 的定值电阻. 已知灵敏电流计 Ⓖ 的满偏电流 $I_g = 100\ \mu\mathrm{A}$、内阻约 $R_g = 2.0\ \mathrm{k\Omega}$. 若要改装后的电压表满偏电压为 6 V，需测量灵敏电流计的内阻，研究性学习小组决定用半偏法测灵敏电流计的内阻.

实验中备有下列器材：

待测电流表 Ⓖ(量程 $I_g = 100\ \mu\mathrm{A}$)；

电阻箱 R'(0 ～ 99 999.9 Ω)；

滑动变阻器 R_1(总电阻约 5 kΩ,额定电流 0.5 A);

滑动变阻器 R_2(总电阻约 100 kΩ,额定电流 0.5 A);

电源 E(电动势约为 6 V,内阻约为 2 Ω);

开关及导线若干.

实验步骤:

(1) 若采用如图 9 所示的电路测定灵敏电流计的内阻,并且要想得到较高的精确度,那么,以上备用的器材中,滑动变阻器 R 应选用________.

(2) 若实验中测得待测灵敏电流计的内阻 $R_g = 2.0$ kΩ,现要想将此灵敏电流计改装成量程为 6 V 的电压表,则改装的方法是将灵敏电流计与电阻箱 R' ________联,并将电阻箱的阻值调为________ Ω.

(3) 请将电路图图 8 补充完整.

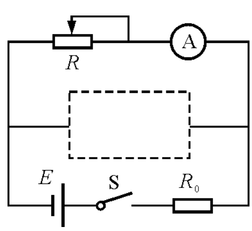

图 8　实验原理图

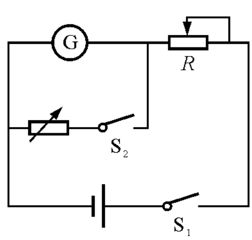

图 9　测定灵敏电流计内阻

(4) 某次实验的数据如表 2 所示.

表 2　电压表、电流表示数

测量次数	1	2	3	4	5	6	7	8
改装电压表读数 U/V	5.25	5.16	5.05	4.93	4.84	4.70	4.60	4.45
电流表读数 I/mA	20	40	60	80	100	120	140	160

该小组借鉴"研究匀变速直线运动"实验中计算加速度的方法(逐差法),计算出电池组的内阻 $r=$______ Ω(保留 3 位有效数字).

解析:现只针对电池组的内阻 r 的"逐差法求解"分析如下.

由于本实验中,改装后的电压表所测并非电池组的路端电压,所以无法直接求出电池组内阻,但可以把定值电阻 R_0 等效为电池组内阻的一部分,先用逐差法求出 $r+R_0$,再得到 r 的大小.

$$r+R_0=\left|\frac{\Delta U}{\Delta I}\right|$$

$$(r+R_0)_1=-\frac{\Delta U_1}{\Delta I_1}=\frac{U_1-U_5}{I_5-I_1}$$

$$(r+R_0)_2=-\frac{\Delta U_2}{\Delta I_2}=\frac{U_2-U_6}{I_6-I_2}$$

$$(r+R_0)_3=-\frac{\Delta U_3}{\Delta I_3}=\frac{U_3-U_7}{I_7-I_3}$$

$$(r+R_0)_4=-\frac{\Delta U_4}{\Delta I_4}=\frac{U_4-U_8}{I_8-I_4}$$

所以

$$r+R_0=\frac{(U_1+U_2+U_3+U_4)-(U_5+U_6+U_7+U_8)}{4\times 80\times 10^{-3}}=5.625\ \Omega$$

即　$$r=1.63\ \Omega$$

4　结束语

综上所述,"逐差法"不仅可以求匀变速直线运动的加速度,它实际上是线性关系数据处理的一般方法.在中学理科实验的数据处理中,都可以借鉴该种方法,线性变通后使用,应引起中学教师和考试命题者的关注.以上例题,也能反映出相关考试的一种命题趋势,"逐差法"处理数据准确快速的这一优势,也必然会在今后的高考等各种考试中进一步体现出来.

参考文献

1　戴耀东.探究逐差法处理纸带时奇数段位移该如何取舍.物理教师,2013(12):52

2　石睿.由逐差法得到的答案是唯一的吗——2014 年高考福建理综卷一道实验题的答案值得商榷.物理通报,2014(12):111

3　张敬德.逐差法为什么会减小误差.中学物理教学参考,2009(6):16

4　张永才,王鹏,张季谦.基于逐差法的线性电阻伏安特性实验数据处理.中学物理,2016(12):63