磁场的环量:从含时场到稳恒场

李凤敏

(天津职业技术师范大学理学院　天津　300222)

(收稿日期:2018－05－07)

摘　要:恒定磁场的安培环路定理告诉我们,磁场的环量等于真空磁导率与穿过闭合环路的传导电流代数和的乘积.众所周知,电路中各处的电流对磁场都是有贡献的,但是穿过闭合环路的传导电流只来源于环路处的电荷运动.为了理解这一现象,考察了电路从开放变成闭合时,全电路的安培环路定理怎么变成稳态电路的安培环路定理.通过这一过程发现,安培环路定理中的传导电流正是全电路运动电荷位移电流的贡献.

关键词:安培环路定理　传导电流　位移电流　电位移通量

磁场的环量是描述磁场的一个重要物理量.对于静磁场或者恒定磁场,磁场的环量由安培环路定理给出,其形式是[1,2]

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_c \tag{1}$$

方程左边环路积分中的磁感应强度来自于电路中各处电流的贡献.方程右边的电流是穿过环路的传导电流

$$I_c = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

对于稳恒情况,电路或者电流是闭合的,电路中的任意地方传导电流都是相等的.对于开放电路,例如一段在空间运动的带电直线等,电磁场是随时间变化的,磁场的环量由全电路的安培环路定理给出

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(I_c + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) \tag{3}$$

方程右边括号中的第二项是位移电流,是电位移通量的时间变化率.如果带电直线段变成无限长,那么电场磁场都不随时间变化了,教科书中一般会这样解释:此时位移电流消失,全电路的安培环路定理式(3)就变成了稳恒电路的安培环路定理式(1).但是,位移电流是怎么慢慢消失的,一般没有说明详细的过程.为了研究清楚其中的细节,有必要从非稳恒情况,例如一段运动的有限长的带电直线出发,考察从式(3)到式(1)的详细过程.

1　从非稳态到稳态

如图 1 所示,假设电流沿 z 轴从负的无限远处向正的无限远处流动,闭合环路设在原点 O 处.下面分 3 种情况讨论全电路的安培环路定理:(1) 电流到达 P_1 点;(2) 电流到达 P_2 点;(3) 电流到达无限远处.

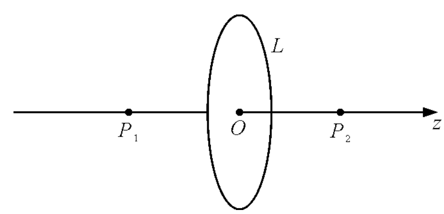

图 1　电流沿 z 轴从负的无限远处向正的无限远处流动

1.1　当电流到达 P_1 点

当电流到达 P_1 点时,传导电流没有穿过环路,因此式(3)为

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4}$$

如图 2 所示,在 $P_1(0,0,z)$ 点处取电荷 $\mathrm{d}q$(记 $\mathrm{d}q = Q$),其在圆平面上场点 $(x,y,0)$ 的场强

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q = \frac{(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y - z\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

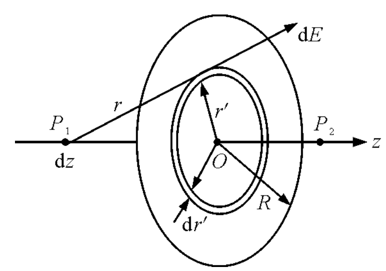

图 2　电流到达 P_1 点

该场对以 O 为圆心,以 R 为半径的闭合回路所围圆面的电位移通量为

$$\Phi_{QD}^{(-)}(z) = \int_0^R \varepsilon_0 \mathrm{d}\boldsymbol{E}_Q \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$\int_0^R \frac{(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y - z\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}q}{4\pi(z^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi r'\,\mathrm{d}r'\,\boldsymbol{e}_z =$$

$$-\int_0^R \frac{\mathrm{d}q\,2\pi r'\,\mathrm{d}r' z}{4\pi r^3}$$

积分得

$$\Phi_{QD}^{(-)}(z) = \frac{\mathrm{d}q}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 1\right] \qquad (\forall z < 0) \tag{6}$$

根据位移电流的定义 $I_D = \frac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t}$，可得该电荷在环路处产生的位移电流

$$I_{QD}^{(-)}(z) = \frac{\mathrm{d}\phi_{QD}^{(-)}(z)}{\mathrm{d}t} =$$

$$\frac{vR^2\mathrm{d}q}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (\forall z < 0) \tag{7}$$

其中 $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$，为带电直导线中元电荷的运动速度.

从负无穷到 P_1 点的所有运动电荷对该环路的位移电流为

$$I_D = \int_{-\infty}^{-z} \frac{vR^2\mathrm{d}q}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{-z} \frac{vR^2\lambda\,\mathrm{d}z}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\lambda v}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \tag{8}$$

此时由全电路安培环路定理及位移电流可计算环路上任意点的磁感应强度的大小，根据式(4) 及式(8) 有 $2\pi RB = \mu_0 I_D$，即

$$B = \frac{\mu_0 \lambda v}{4\pi R}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \tag{9}$$

如图 3 所示，利用任意一段载流直导线的磁场公式

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{10}$$

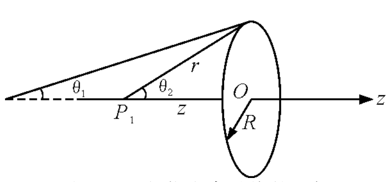

图 3　一段载流直导线的磁场

对该段载流导线有 $\theta_1 = 0$，$\cos\theta_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$，代入式(10) 中得环路处的磁感应强度大小

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) = \frac{\mu_0 \lambda v}{4\pi R}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

结果与式(9) 完全相同，也就是说环路处的磁场完全由运动电荷产生，而位移电流对磁场的贡献为零，这一结论与相关文献[3~6] 的观点一致.

当电荷 Q 沿导线从左侧趋近 O 点时，Q 到圆环平面的距离趋于零，此时圆环平面可看作无限大平面. 由式(6) 可知当 $z \to 0_-$，Q 的电场对该圆平面的电位移通量 $\Phi_{QD} = \frac{Q}{2}$，当 Q 穿过圆心运动到 O 点右侧附近，即 $z \to 0_+$ 时，由式(12) 可得 Q 的电场对该圆平面的电位移通量 $\Phi_{QD} = -\frac{Q}{2}$，因此当 Q 通过 O 点时电位移通量的增量 $\Delta\Phi_{QD} = -Q$，位移电流为

$I_{QD} = \frac{\Delta\Phi_{QD}}{t} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -I_c$，即当 Q 穿过 O 点时有

$$I_{QD} + I_c = 0 \tag{11}$$

1.2　当电流到达 P_2 点

接下来分析电流穿过如图 1 所示的回路到达 P_2 点的情况. 当电流到达 P_2 处时，Q 的电场对圆环平面的电位移通量

$$\Phi_{QD}^{(+)}(z) = \frac{\mathrm{d}q}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right] \qquad (\forall z > 0) \tag{12}$$

位移电流为

$$I_{QD}^{(+)}(z) = \frac{\mathrm{d}\Phi_{QD}^{(+)}(z)}{\mathrm{d}t} =$$

$$\frac{vR^2\mathrm{d}q}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad z > 0 \tag{13}$$

由于电流到达 P_2 处时有传导电流穿过环路，因此

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0(I_c + I_{QD} + I_{LD} + I_{RD}) \tag{14}$$

式中 I_{QD}，I_{LD}，I_{RD} 分别代表正在通过回路、回路左边和回路右边的电荷对位移电流的贡献. 下面分别对 I_{LD}，I_{RD} 进行计算.

回路左边的电荷对位移电流的贡献可由式(7) 积分得

$$I_{LD} = \int_{-\infty}^{0} \frac{vR^2\mathrm{d}q}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{vR^2\lambda\,\mathrm{d}z}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda v}{2} \tag{15}$$

回路右边的电荷对位移电流的贡献由式(13) 积分得

$$I_{RD} = \int_0^z \frac{vR^2\mathrm{d}q}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\int_0^z \frac{vR^2\lambda\mathrm{d}z}{2(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda v}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \tag{16}$$

将式(11)、(15)、(16)代入式(14)中得 $2\pi RB=\mu_0(I_{LD}+I_{RD})$，即

$$B=\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi R}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \tag{17}$$

如图4所示，利用式(10)计算电流到达 P_2 处在环路处产生的磁感应强度，式中 $\theta_1=0$，$\cos\theta_2=-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$，代入式中可得

$$B=\frac{\mu_0\lambda v}{4\pi R}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

此结果与式(17)完全相同，再次看到环路处的磁场完全由运动电荷即传导电流产生，位移电流对磁场的贡献为零.

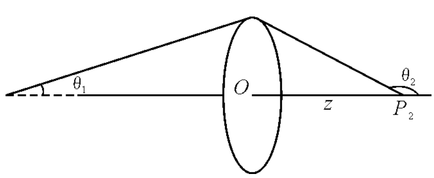

图4　电流到达 P_2 处

1.3　当电流到达无限远处

最后来看，电流从 P_2 点继续向前流动，到达无限远处的情况. 当电流从 P_2 点流动到正无限远时，式(16)中 $z\to+\infty$，因此 $I_{RD}=\frac{\lambda v}{2}$，即电流到达正的无限远，电流稳定后由式(14)、(15)、(16)有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\lambda v=\mu_0 I_c \tag{18}$$

式(18)即为稳恒电流的安培环路定理，其中的传导电流是电路中各处位移电流之和. 由此我们知道安培环路定理两边的来源也是一致的.

2　结束语

从一段运动的带电直线形成的开放电路出发，通过微观层次上的电荷运动，讨论了从全电路的安培环路定理到恒定情况下安培环路定理的详细过程. 从全电路的安培环路定理回到恒定磁场安培环路定理的关键是，对于恒定情况，全电路中各处运动电荷的位移电流之和数值上正好等于传导电流. 希望这一结果对于更好地理解安培环路定理有所帮助.

参考文献

1　张三慧. 大学基础物理学(第2版)下册. 北京：清华大学出版社，2007

2　程守洙，江之永. 普通物理学(第5版). 北京：高等教育出版社，1999

3　赵凯华. 位移电流不激发磁场简例. 大学物理，2001，20(6)：44～45

4　赵凯华. 再论位移电流与传导电流不以同样规律(方式)激发磁场. 大学物理，2001，20(8)：29～31

5　朱久运，贾兆平，罗维治. 在似稳条件下磁场的计算. 大学物理，1982，1(9)：15～17

6　苏景顺，谢革英. 似稳条件下位移电流不激发磁场的证明及其例证. 河北建筑工程学院学报，2007(4)：94～96

Circulation of Magnetic Field: From Time-dependent Fields to Stable Fields

Li Fengmin

(School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin　300222)

Abstract: The Ampere's circuital law for time-independent magnetic field tells us that magnetic circulation equals the product of vacuum permeability and the conduction current through the loop. As well-known, current in every part of the circuit contributes to the magnetic field. However, the conduction current through the loop only originates from the charge motion around the loop. To under this phenomenon, the whole-circuit Ampere's circuital is studied when the circuit is changed from open to closed. Through this process, it is found that the conduction current in the Ampere's circuital law is the contribution of the charge motion in the whole circuit through the displacement current.

Key words: Ampere's circuital law; conduction current; displacement current; flux of electric displacement