等距圆锥螺旋线数理性质的初探

涂德新
（江西师范大学附属中学　江西 南昌　330046）
姜付锦
（武汉市黄陂区第一中学　湖北 武汉　430300）

（收稿日期：2018-05-16）

摘　要：等距圆锥螺旋线是一种重要的空间曲线，从数学和物理两个角度研究其性质，并进行了数值模拟.

关键词：参数方程　曲率半径　主法向向量　次法向向量　作用力

如果质点沿阿基米德螺线（等速螺线）运动的同时沿垂直于该平面的方向匀速运动，于是质点的合运动所形成的轨迹就是等距圆锥螺旋线（以下简称螺旋线）. 下面首先用物理方法研究螺旋线的曲率半径，接着研究质点在重力的作用下沿光滑螺旋线运动时受到的作用力，并在直角坐标系和自然坐标系中求解，得到了相同的结果.

1　螺旋线的曲率半径

1.1　建立螺旋线的参数方程

如图 1 所示，建立直角坐标系 $O-xyz$，圆锥的半顶角为 α，螺距为 $2\pi l$，一个质量为 m 的小球从坐标原点由静止开始沿光滑的螺旋线运动. 重力加速度为 g.

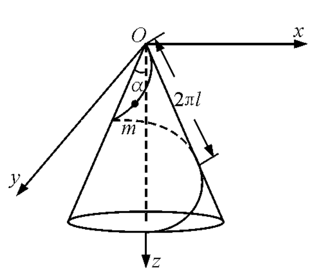

图 1　直角坐标系下的圆锥螺旋线

以极角 φ 为参数可以建立螺旋线的参数方程

$$x=k\varphi\cos\varphi \qquad y=k\varphi\sin\varphi \qquad z=k\varphi\cot\alpha$$

考虑到一个螺距为 $2\pi l$，于是

$$2\pi l\sin\alpha=k2\pi$$

可得

$$k=l\sin\alpha$$

则

$$x=l\sin\alpha\cdot\varphi\cos\varphi$$

$$y=l\sin\alpha\cdot\varphi\sin\varphi$$

$$z=l\cos\alpha\cdot\varphi$$

1.2　物理方法求曲率半径

曲率半径仅与空间曲线本身有关[1]，构造动点沿曲线不同的运动形式，曲率半径不变，这里构造动点沿螺旋线运动的 $\dot{\varphi}$ 为常数，于是有

$$\dot{x}=l\sin\alpha(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{y}=l\sin\alpha(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{z}=l\cos\alpha\cdot\dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}=l\sin\alpha(-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{y}=l\sin\alpha(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{z}=0$$

可以求得

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)l^2\dot{\varphi}^2$$

$$a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2=(4+\varphi^2)l^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\varphi}^4$$

曲率半径 ρ 与向心加速度 a_n 间存在关系

$$\rho=\frac{v^2}{a_n} \tag{1}$$

分析有

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$$

其中

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{l\sin^2\alpha\cdot\varphi\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2}}$$

可以求得

$$a_n = l\sin\alpha\cdot\dot{\varphi}^2\sqrt{\frac{4+\varphi^2+3\sin^2\alpha\cdot\varphi^2+\sin^2\alpha\cdot\varphi^4}{1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2}}$$

将相关参量代入式(1)可得

$$\rho = \frac{l\,(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)^{1.5}}{\sin\alpha\sqrt{4+\varphi^2+3\sin^2\alpha\cdot\varphi^2+\sin^2\alpha\cdot\varphi^4}}$$

1.3　数值模拟($l=10,\alpha=\frac{\pi}{6}$)

数值模拟如图 2、图 3 所示.

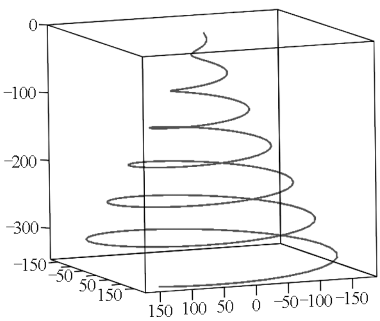

图 2　小球三维空间中的运动轨迹

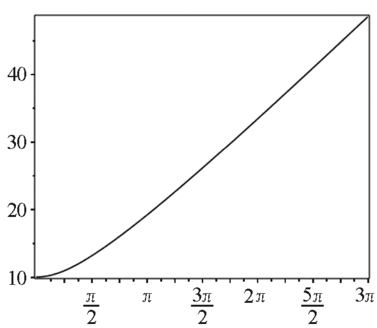

图 3　曲率半径与极角关系

2　小球受到螺旋线的作用力

2.1　直角坐标系中求解

小球沿光滑的轨道运动，其机械能守恒

$$mgz = \frac{1}{2}mv^2$$

即　$$mgl\cos\varphi = \frac{1}{2}m(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)l^2\dot{\varphi}^2$$

可以求得

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g\cos\alpha\cdot\varphi}{l(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)} \tag{2}$$

再求二阶导数可得

$$\ddot{\varphi} = \frac{g\cos\alpha(1-\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)}{l\,(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)^2} \tag{3}$$

在这种情况下

$$\ddot{x} = l\sin\alpha[(-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\ddot{\varphi}]$$

$$\ddot{y} = l\sin\alpha[(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\ddot{\varphi}]$$

$$\ddot{z} = l\cos\alpha\cdot\ddot{\varphi}$$

对小球写 3 个方向的牛顿第二定律

$$N_x = m\ddot{x}$$

$$N_y = m\ddot{y}$$

$$mg + N_z = m\ddot{z}$$

小球受到的作用力为

$$N_1^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

代入可得

$$N_1^2 = (ml\sin\alpha)^2[(4+\varphi^2)\dot{\varphi}^4 + (1+\varphi^2)\ddot{\varphi}^2 + 2\varphi\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}] + (mg-ml\cos\alpha\cdot\ddot{\varphi})^2 \tag{4}$$

将式(2)、式(3)代入式(4)并化简求解得

$$N_1 = \frac{(A\varphi^6+B\varphi^4+C\varphi^2+D)^{0.5}}{4\,(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)^{1.5}}mg \tag{5}$$

其中

$$A = 19\sin^2\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 3\sin^2 3\alpha$$

$$B = 63\sin^2\alpha + 34\sin^2 2\alpha - 15\sin^2 3\alpha$$

$$C = 48\sin^2\alpha + 72\sin^2 2\alpha$$

$$D = 16\sin^2\alpha$$

2.2　自然坐标系中求解

空间曲线上的某点存在 3 个向量：切向向量、主法向向量和次法向向量. 切向向量指向弧坐标的正向，主法向向量指向曲率中心，切向向量和主法向向量构成密切平面(曲率平面)，次法向向量与这个平面垂直，切向向量与次法向向量决定的平面为从切面(直切面). 动点的速度和切向加速度均与切向向量平行，动点的法向加速度沿主法向向量的方向，这 3 个向量构成的右手坐标系即自然坐标系. 下面求解螺旋线上某点的切向向量 $\boldsymbol{A}$、次法向向量 $\boldsymbol{B}$ 和主法向向量 $\boldsymbol{C}$.

以极角 φ 为参变量，依照前面的分析有

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} = (\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{j} + \cot\alpha\cdot\boldsymbol{k}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

我们知道 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 位于密切平面内，不一定沿主法向向量方向[2]，但是存在关系

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi-\varphi\sin\varphi & \sin\varphi+\varphi\cos\varphi & \cot\alpha \\ -2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi & 2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

展开得

$$\boldsymbol{B}=-(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\cot\alpha\cdot\boldsymbol{i}+$$
$$(-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\cot\alpha\cdot\boldsymbol{j}+(2+\varphi^2)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\cot\alpha & (-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\cot\alpha & 2+\varphi^2 \\ \cos\varphi-\varphi\sin\varphi & \sin\varphi+\varphi\cos\varphi & \cot\alpha \end{vmatrix}$$

展开得

$$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{k}$$

其中

$$C_x=-(2\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\cot^2\alpha-$$
$$(2+\varphi^2)(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)$$
$$C_y=(2+\varphi^2)(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)+$$
$$(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\cot^2\alpha$$
$$C_z=-\varphi\cot\alpha$$

可以对小球写切线方向的牛顿第二定律，从法线方向的平衡方程和主法线方向的牛顿第二定律

$$mg\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}^0=ma_A$$
$$mg\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}^0=N_B$$
$$mg\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{C}^0+N_C=ma_C$$

其中 $\boldsymbol{A}^0$,$\boldsymbol{B}^0$,$\boldsymbol{C}^0$ 分别为切线方向、从法线方向和主法线方向的单位向量.

a_C 为法向加速度

$$a_C=\frac{v^2}{\rho}$$

代入可得

$$a_C=\frac{2g\sin\alpha\cos\alpha\cdot\varphi}{(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)^{1.5}}\cdot$$
$$\sqrt{4+\varphi^2+3\sin^2\alpha\cdot\varphi^2+\sin^2\alpha\cdot\varphi^4}$$

可以求得

$$N_B=\frac{(2+\varphi^2)mg}{\sqrt{(4+\varphi^2)\cot^2\alpha+(2+\varphi^2)^2}}$$

以及

$$N_C=N_{C1}+N_{C2}$$

其中

$$N_{C1}=\frac{mg\sin 2\alpha\cdot\varphi}{(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)^{1.5}}\cdot$$
$$\sqrt{4+\varphi^2+3\sin^2\alpha\cdot\varphi^2+\sin^2\alpha\cdot\varphi^4}$$

$$N_{C2}=mg\cot\alpha\cdot\varphi\cdot[(1+\varphi^2)(2+\varphi^2)^2+$$
$$(8+9\varphi^2+2\varphi^4)\cot^2\alpha+(4+\varphi^2)\cot^4\alpha]^{-\frac{1}{2}}$$

小球受到的作用力

$$N_2^2=N_B^2+N_C^2$$

代入可以求得 N_2 的表达式同式(5)一致.

2.3 数值模拟($m=1$ kg,$l=1$ m,$\alpha=\frac{\pi}{6}$,$g=10$ m/s^2)

2.3.1 小球受到的作用力与极角的图像

如图 4 所示，两种坐标系中分析结果的图像完全重合. 可以发现作用力不断增加，存在极限值，分析式(5)可以求得

$$N=\lim_{\varphi\to\infty}N_1=\frac{\sqrt{A}}{4\sin^3\alpha}mg$$

其中

$$A=19\sin^2\alpha+2\sin^2 2\alpha-3\sin^2 3\alpha$$

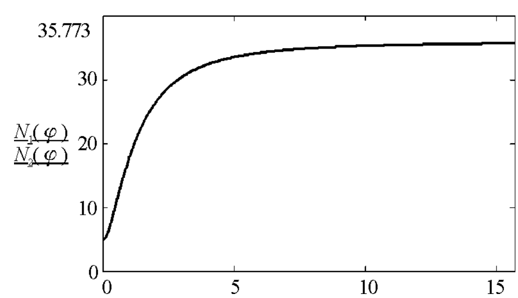

图 4　作用力与极角的关系

2.3.2 小球受到的作用力与时间的图像

由式(2)得：$\dot{\varphi}=\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha\cdot\varphi}{l(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)}}$

可以写成

$$t=\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{l(1+\sin^2\alpha\cdot\varphi^2)}{2g\cos\alpha\cdot\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

这个积分涉及到椭圆积分和复变函数，所以时间与极角的关系很难写成显性解析式，定积分结果中含有椭圆积分和复变函数

$$t_{(\varphi)}=\left\{\left[4\mathrm{I}\sqrt{(\varphi^2+4)\mathrm{I}}\cdot\mathrm{EllpitK}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-\mathrm{I}(4+2\mathrm{I})},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\varphi^{2.5}+4\varphi^{0.5}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{\varphi^2+4}}-$$
$$\left.2\sqrt{2}\,\mathrm{I}(1+\mathrm{I})\cdot\mathrm{EllíptiK}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\cdot\sqrt{\frac{l}{18g\cos\alpha}}$$

(下转第 80 页)

长度”和“测量长度”以及“固有时间”和“测量时间”这两组基本概念的区别，夯实基础．可通过分析讲解具体的事例，引导学生接受狭义相对论的新时空观，理解“长度收缩”和“时间延缓”这两个公式成立的条件，做到具体问题具体分析，而不是机械的套用公式．

3．2　培养学生灵活分析 解决问题的能力

“授之以鱼，不如授之以渔”，在教学过程中教师不能仅满足于把知识传授给学生，而应把学生当成教学的主体，引导学生多思考，多参与课堂教学．通过一些生动的例子使学生处理好狭义相对论与经典理论的辩证关系，注重培养学生分析解决问题的能力，科学思维能力，努力实现知识、能力、素质的协调发展．

参 考 文 献

1　教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委员会．理工科类大学物理课程教学基本要求(2010 年版)．北京：高等教育出版社，2011

2　刘家福，张昌芳．大学生物理竞赛试题赏析(Ⅴ)—— 近代物理部分．物理通报，2015(11)：50 ～ 52

3　北京物理学会．第 28 届全国部分地区大学生物理竞赛试卷．2011．3

Discussion on a Competition Title about Special Theory of Relativity

Wang Yang　Liu Jiafu　Wang Junling

(Army Academy of Armored Forces，Beijing　100072)

Abstract：This article mainly analyzes the novelty and problem-solving essentials of a special relativity topic in the 10th issue of the 28th National College Student Physics Contest，and puts forward some suggestions for the teaching of spatiotemporal view of the special relativity.

Key words：special theory of relativity；university physics competition；physics teaching

(上接第 77 页)

小球运动的时间 t 与极角 φ 的关系数值模拟如图 5 所示．

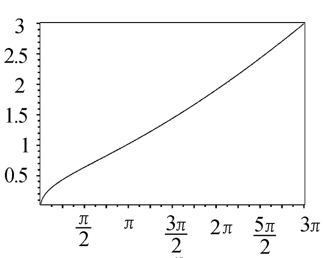

图 5　时间与极角的关系图

考虑到时间 t 、极角 φ 和作用力 N 是一一对应的，可以数值模拟出作用力与时间的图像如图 6 所示．

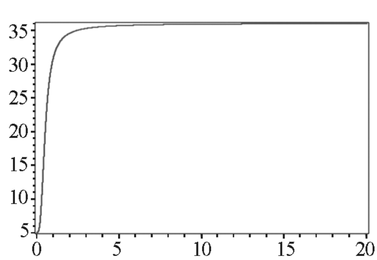

图 6　作用力与时间的关系图

3　结语

本文用物理方法求螺旋线的曲率半径，过程简洁，思路清晰．用两种办法求螺旋线对小球的作用力，直角坐标系中求解过程简单明了．自然坐标系中虽然比较复杂，却很有意义：小球沿空间曲线运动时，其速度和切向加速度均与切向向量平行，法向加速度沿主法向向量的方向，在从法向向量的方向是平衡的．并且所有的量均可以表示成极角的函数，结果发现两种方法的计算结果一致．本文还对曲率半径和小球受到的作用力进行了数值模拟，这对我们的教学研究有一定的借鉴．

参 考 文 献

1　杜明铸．柱坐标系和球坐标系中速度、加速度表达式的一种简易推导．河套大学学报，2008(02)：18 ～ 23

2　闫焱．空间曲线的主法向量方向的探讨．陕西师范大学继续教育学报，2005(03)：104 ～ 105