随位移均匀变化的磁场中电磁感应规律的初探

甘恒一　胡　安　汤辰旭　姜付锦

（黄陂区第一中学　湖北 武汉　430030）

（收稿日期：2018-05-25）

摘　要：先分析了3个在随位移均匀变化的磁场中导体线框感应电动势的计算问题，发现了感应电动势与导体线框的面积有关，最后通过微元法证明了：在这种磁场中导体线框匀速直线运动时产生的感应电动势与其面积成正比.

关键词：随位移均匀变化的磁场　闭合导体线框　感应电动势

1　题目

如图1所示，在第一象限内存在垂直纸面向外的磁场，磁感应强度 $B=B_0+kx$，($B_0>0$，$k>0$ 且都是常数)，x 为某点到 y 轴的距离，有一个边长为 L 的正方形导体线框 $ABCD$ 沿 x 轴从原点以速度 v_0 匀速运动，求导体线框中产生的感应电动势 E.

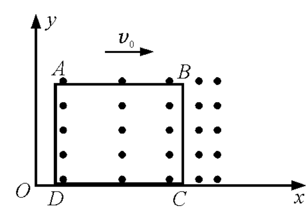

图1　题目题图

设 AD 所在位置坐标为 x_D，BC 边所在位置为

$$v=\sqrt{(3-2\sqrt{2})gd}\qquad v_{物}=\frac{\sqrt{(6-4\sqrt{2})gd}}{2}$$

(3) 环从 A 运动到 B 的过程中，对环运用动能定理，有

$$mgd-W=\frac{1}{2}mv^2-0$$

联立各式，解得

$$W=\frac{1+2\sqrt{2}}{4}mgd$$

(4) 规定向下为正方向，环从 A 运动到 B 的过程中，因绳对环拉力的冲量不在竖直方向上，运用动量定理非常麻烦.因此，对重物、环与重物组成的系统分别应用动量定理.

对重物运用动量定理，有

$$2mgt-I=2m(-v_{物})-0$$

对环与重物组成的系统运用动量定理，有

$$mgt+2mgt=mv+2m(-v_{物})$$

联立各式，解得

$$I=\frac{2}{3}m\sqrt{gd}$$

(5) 环下降到最大高度 H 时，环和重物的速度均为零.此时重物上升的最大高度为 $\sqrt{H^2+d^2}-d$.根据系统的机械能守恒定律，有

$$mgH=2mg(\sqrt{H^2+d^2}-d)$$

解得

$$H=\frac{4}{3}d$$

解决绳杆系统能量、动量问题应注意以下几个方面：一是明确系统机械能守恒定律成立的条件，合理使用整体法与隔离法，正确使用动量定理；二是两关联物体的速度大小关系，把握住沿绳或杆方向速度相等；三是明确各物体高度变化关系，相关联的物体高度变化不一定相等.

参 考 文 献

1　陈晓宇.巧用平动非惯性系解决高中物理力学问题.物理通报，2013(7)：108～109

2　程贤楼.也谈绳、杆牵连模型中的加速度.中学物理，2013，31(3)：71～73

3　王志成.绳连体加速度关系的讨论.物理通报，2008(6)：63～64

4　何述平.绳－船模型的教学研究.物理通报，2016(3)：29～33

x_C，由法拉第电磁感应定律，则

$$E_{AD}=B_DLv_0 \qquad E_{BC}=B_CLv_0 \qquad x_C-x_D=L$$

导体线框中的总电动势为

$$E=B_CLv_0-B_DLv_0=L^2kv_0$$

2　若导体线框是正三角形会怎样

若导体线框是一个边长为 L 的正三角形，以速度 v_0 匀速运动，求导体线框中产生的感应电动势 E. 如图2所示，若此时 A 点的横坐标为 x_A（$x_A \geqslant \frac{L}{2}$），在 A 点两边 AB 和 AC 边上对称位置 λ（$|\lambda| \leqslant \frac{L}{2}$）处取两个微元 $\mathrm{d}\lambda$，则两个微元在导体棒上对应的有效切割长度为 $\sqrt{3}\,\mathrm{d}\lambda$，它们产生的电动势微元分别为（以下两式中 $|\lambda| \leqslant \frac{L}{2}$）

$$\mathrm{d}E_{AB}=\sqrt{3}v_0[B_0+k(x_A-\lambda)]\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathrm{d}E_{AC}=\sqrt{3}v_0[B_0+k(x_A+\lambda)]\mathrm{d}\lambda$$

总电动势微元

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_{AC}-\mathrm{d}E_{AB}=2\sqrt{3}kv_0\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

把上式求定积分得

$$E=\int_0^{\frac{L}{2}}2\sqrt{3}v_0k\lambda\,\mathrm{d}\lambda=2\sqrt{3}v_0k\int_0^{\frac{L}{2}}\lambda\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2kv_0$$

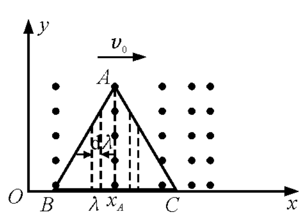

图2　导体线框边长为 L 的正三角形

3　若导体线框是一个半径为 R 的圆形，则结果又如何

如图3所示，在夹角为 θ 两边对称位置取微元 $R\,\mathrm{d}\theta$，则电动势微元为

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_2-\mathrm{d}E_1=[B_0+k(x_0+R\sin\theta)]Rv_0\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta-[B_0+k(x_0-R\sin\theta)]Rv_0\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

整理后得

$$\mathrm{d}E=2R\sin\theta kRv_0\sin\theta\mathrm{d}\theta=2R^2kv_0\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

对以上式子求定积分得

$$E=\int_0^{\pi}2R^2v_0k\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi R^2v_0k$$

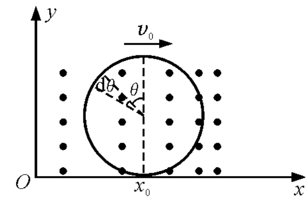

图3　导体线框为半径 R 的圆形

4　一点猜想

当导体线框是正方形时，导体线框中的总电动势为

$$E=B_CLv_0-B_DLv_0=L^2kv_0$$

当导体线框是正三角形时，导体线框中的总电动势为

$$E=\int_0^{\frac{L}{2}}2\sqrt{3}v_0k\lambda\,\mathrm{d}\lambda=2\sqrt{3}v_0k\int_0^{\frac{L}{2}}\lambda\,\mathrm{d}\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2kv_0$$

当导体线框是圆形时，导体线框中的总电动势为

$$E=\int_0^{\pi}2R^2v_0k\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi R^2v_0k$$

通过以上分析可以发现，感应电动势与导体线框的面积成正比，比例系数为 kv_0，为什么是这样的呢？

5　数学证明

如图4所示，假设导体线框是任意形状的封闭曲线，把曲线在纵向平均分割成无数个条状面元，每个面元的高度为 Δy，在其上任意选择一个矩形 $ABCD$，则这个矩形中产生的感应电动势为

$$\mathrm{d}E=(B_0+kx_D)v_0\Delta y-(B_0+kx_A)v_0\Delta y=v_0k(x_D-x_A)\Delta y=v_0k\Delta x\Delta y$$

上式中的 $\Delta y\Delta x$ 正好是面元的面积，所以对它求定积分后就是导体线框的面积.

综上所述，在随位移均匀变化的磁场中，导体线框在匀速运动时产生的感应电动势与导体线框的面积成正比，比例系数为 kv_0.

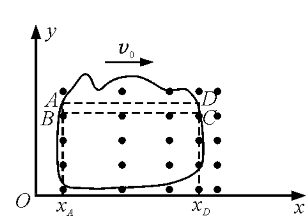

图4　导体线框为任意形状的封闭曲线