学生创新园地

两球弹性碰撞次数与它们质量之比的关系研究

—— 对一道物理竞赛题的再思考

文世达　梅　军　廖秀秀　周诗昊

(武汉市外国语学校　湖北 武汉　430022)

(收稿日期:2018-06-06)

摘　要:通过对一道竞赛题的分析,发现两球只发生两次弹性碰撞与两球质量之比有一定的关系,然后进一步研究并得到了两球只发生 $n(n \geqslant 2)$ 次弹性碰撞与两球的质量之比的定量关系,并找到了在整个过程中系统动量变化的数值及产生这个变化的原因.

关键词:弹性碰撞　质量之比　递推关系式　本征值　复变函数

1　题目

如图 1 所示,半径足够大的光滑圆弧面与一光滑水平面平滑相接,一个质量为 m 的小球 B 静止于水平面上.质量为 km 的小球 A 从圆弧面某一位置释放,到达水平面的速度为 v_0,并与小球 B 发生碰撞.假设所有的碰撞均为弹性碰撞.问:要使球 A,B 能且仅能发生两次弹性碰撞,需满足什么条件?

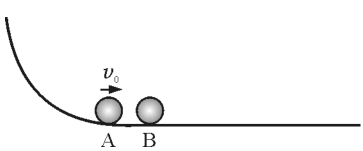

图 1　题目题图

1.1　分析过程

需要明确的是,B 球的速度始终向右,故要发生碰撞,A 球也必然向右运动,且 A 球的速度大于 B 球的速度.那么 A 球碰撞后必然要反弹才可能有下一次的碰撞.要使 A,B 只发生两次碰撞,需要满足第一次碰撞后 A 球反弹且反弹回水平面的速度大于 B 球第一次碰撞后的速度,以及第二次碰撞后 A 球的速度小于或等于 B 球的速度.由于是弹性碰撞,那么在碰撞过程满足动量守恒和机械能守恒.设第一次碰撞后 A 和 B 的速度分别是 $v_{1,1}$ 和 $v_{2,1}$,第二次碰撞后的速度分别为 $v_{1,2}$ 和 $v_{2,2}$,则有

$$kmv_0 = kmv_{1,1} + mv_{2,1} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}kmv_0^2 = \frac{1}{2}kmv_{1,1}^2 + \frac{1}{2}mv_{2,1}^2 \tag{2}$$

联立式(1)、(2) 可以解得

$$v_{1,1} = \frac{k-1}{1+k}v_0 \qquad v_{2,1} = \frac{2k}{1+k}v_0$$

第二次碰撞前球 A 和球 B 的速度分别是 $-v_{1,1}$ 和 $v_{2,1}$,同理可以得到

$$v_{1,2} = -\frac{k^2-6k+1}{(1+k)^2}v_0 \qquad v_{2,2} = \frac{4k-4k^2}{(1+k)^2}v_0$$

只发生两次弹性碰撞应满足

$$v_{1,1} < 0, 且 -v_{1,1} > v_{2,1} \tag{3}$$

以及 $v_{2,2} > 0$,且

$$|v_{1,2}| \leqslant v_{2,2} \tag{4}$$

由式(3)、(4) 分别得到

$$k < \frac{1}{3} 和 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant k < 1$$

综上所述,k 应满足的条件为 $1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant k < \frac{1}{3}$.

1.2　A 球是否反弹的条件

另外,我们分析最后一次弹性碰撞后 A 球速度的方向.如果 A 球不反弹,则 $v_{1,2} = -\frac{k^2-6k+1}{(1+k)^2}v_0 \geqslant 0$,得到 $3-2\sqrt{2} \leqslant k \leqslant 3+2\sqrt{2}$.所以 $3-2\sqrt{2} \leqslant k < \frac{1}{3}$ 时,A 球不反弹,$1-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant k < 3-2\sqrt{2}$ 时,A 球反弹.类似的,我们可以得到只发生一次弹性碰撞的

条件是$k\geqslant\frac{1}{3}$. 当$\frac{1}{3}\leqslant k<1$时,A球反弹,$k\geqslant 1$时,A球不反弹.

2 两球只发生$n(n\geqslant 2)$次弹性碰撞的分析

我们还可以进一步思考一下,如果不给定一个具体的数值,而是直接给定常数n,A,B能且只能发生n次弹性碰撞($n\geqslant 2$),需满足什么条件?能否写出发生n次弹性碰撞的通式?

2.1 找递推关系式

对于这个问题,需要满足的条件是第$n-1$次弹性碰撞后A球的速度反弹,且大于B球的速度,第n次弹性碰撞后A球的速度小于或等于B球的速度.设两小球第$n-1$次弹性碰撞后的速度表示为$v'_{1,n-1}$和$v_{2,n-1}$,第n次弹性碰撞前A球的速度为$v_{1,n-1}$,$v_{1,n-1}=-v'_{1,n-1}$.根据弹性碰撞过程动量守恒和动能守恒,有

$$kmv_{1,n}+mv_{2,n}=kmv'_{1,n+1}+mv_{2,n+1} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}kmv_{1,n}^2+\frac{1}{2}mv_{2,n}^2=\frac{1}{2}kmv'^2_{1,n+1}+\frac{1}{2}mv_{2,n+1}^2 \tag{6}$$

解得

$$v'_{1,n+1}=\frac{k-1}{1+k}v_{1,n}+\frac{2}{1+k}v_{2,n} \tag{7}$$

$$v_{1,n+1}=\frac{1-k}{1+k}v_{1,n}-\frac{2}{1+k}v_{2,n} \tag{8}$$

$$v_{2,n+1}=\frac{2k}{1+k}v_{1,n}+\frac{1-k}{1+k}v_{2,n} \tag{9}$$

其中,$v_{1,0}=v_0$,$v_{2,0}=0$,$v_{1,1}=\frac{1-k}{1+k}v_0$,$v_{2,1}=\frac{2k}{1+k}v_0$.

式(8)可以变换为$(1+k)v_{1,n+1}=(1-k)v_{1,n}-2v_{2,n}$.递推可以得到

$$(1+k)v_{1,n+2}=(1-k)v_{1,n+1}-2v_{2,n+1} \tag{10}$$

将式(9)和式(8)代入式(10),得到

$$\begin{aligned}(1+k)^2v_{1,n+2}&=(1-k^2)v_{1,n+1}-\\ 2[2kv_{1,n}+(1-k)v_{2,n}]&=(1-k^2)v_{1,n+1}-\\ 4kv_{1,n}-2(1-k)\frac{(1-k)v_{1,n}-(1+k)v_{1,n+1}}{2}&=\\ 2(1-k^2)v_{1,n+1}&-(1+k)^2v_{1,n}\end{aligned}$$

即$(1+k)v_{1,n+2}-2(1-k)v_{1,n+1}+(1+k)v_{1,n}=0$

此方程与方程[1]

$$(1+k)x^2-2(1-k)x+(1+k)=0 \tag{11}$$

有共同的本征值.

方程(11)的解为$x=\frac{1-k\pm 2i\sqrt{k}}{1+k}=\mathrm{e}^{\pm i\theta}$,其中$\cos\theta=\frac{1-k}{1+k}$,$\sin\theta=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$,$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 故式(10)的解为$v_{1,n}=A\mathrm{e}^{in\theta}+B\mathrm{e}^{-in\theta}$,($A$,$B$为常数).初值$v_{1,0}=A+B=v_0$,$v_{1,1}=A\mathrm{e}^{i\theta}+B\mathrm{e}^{-i\theta}=A\cos\theta+iA\sin\theta+B\cos\theta-iB\sin\theta=v_0\cos\theta+i(A-B)\sin\theta$,已知$v_{1,1}=\frac{1-k}{1+k}v_0=v_0\cos\theta$.

因此得到$A=B=\frac{v_0}{2}$.

所以$v_{1,n}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{in\theta}+\mathrm{e}^{-in\theta})v_0=v_0\cos n\theta$. 由式(8)得到

$$\begin{aligned}v_{2,n}&=v_0\cdot\frac{(1-k)\cos n\theta-(1+k)\cos(n+1)\theta}{2}=\\ &\frac{v_0}{2}[(1-k)\cos n\theta-(1+k)\cos n\theta\cos\theta+\\ &(1+k)\sin n\theta\sin\theta]=v_0\sqrt{k}\sin n\theta=\\ &v_0\tan\frac{\theta}{2}\sin n\theta\end{aligned}$$

最后一步用到了以下关系

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{k}}{1-k}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},\sqrt{k}=\tan\frac{\theta}{2}$$

2.2 两球只发生n次弹性碰撞的条件

A,B能且只能发生n次弹性碰撞的条件是$v'_{1,n-1}<0$,$v_{1,n-1}>v_{2,n-1}$且$|v'_{1,n}|\leqslant v_{2,n}$. 即$-v_0\cos(n-1)\theta<0$,得

$$\theta<\frac{\pi}{n-1}$$

又因为

$$v_0\cos(n-1)\theta>v_0\tan\frac{\theta}{2}\sin(n-1)\theta$$

进一步可写成

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan(n-1)\theta<1$$

$$\frac{\theta}{2}+(n-1)\theta<\frac{\pi}{2},\text{得 }\theta<\frac{\pi}{2n-1}$$

所以

$$\cos\theta > \cos\frac{\pi}{2n-1}$$

即
$$\frac{1-k}{1+k} > \cos\frac{\pi}{2n-1}$$

解得

$$k < \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{2n-1}}{1+\cos\dfrac{\pi}{2n-1}} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4n-2}\right)$$

同理,由 $v_0\cos n\theta \leqslant v_0\tan\dfrac{\theta}{2}\sin n\theta$,得 $\theta \geqslant \dfrac{\pi}{2n+1}$,

即
$$\frac{1-k}{1+k} \leqslant \cos\frac{\pi}{2n+1}$$

解得

$$k \geqslant \tan^2\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)$$

综上所述,k 应满足的条件是

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4n+2}\right) \leqslant k < \tan^2\left(\frac{\pi}{4n-2}\right) \qquad n \geqslant 2$$

2.3 最后一次弹性碰撞后A球是否反弹的条件

当两球发生最后一次弹性碰撞后,A可能会反弹,当然也有可能不会反弹,根据 $-v_0\cos n\theta \geqslant 0$,可以得到球A不反弹的条件是 $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) \leqslant k < \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4n-2}\right)$,当 $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4n+2}\right) \leqslant k < \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,A球反弹.

可以验证,当 $n=2$ 时,$\tan^2\dfrac{\pi}{10} \leqslant k < \dfrac{1}{3}$,$\tan^2\dfrac{\pi}{10} = 1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,与前面讨论的结果是吻合的.

由 $\cos\theta = \dfrac{1-k}{1+k}$ 可知,对于给定的 k,θ 值是一定的.而 $v_{1,n} = v_0\cos n\theta$,$v_{2,n} = v_0\tan\dfrac{\theta}{2}\sin n\theta$.可见随着弹性碰撞次数的增加,A球的速度逐渐减小,B球的速度逐渐增大,直到 $v_{2,n}$ 大于 $v_{1,n}$,两球不再发生弹性碰撞,且 k 值越小,可发生弹性碰撞的次数越多.

2.4 系统在完成所有弹性碰撞后动量变化

我们再来分析一下弹性碰撞的全过程中动量及能量的变化.显然,全过程中,系统的动能始终是不变的.而每次弹性碰撞A球都给B球一个向右的冲量,这个冲量使B球的动量增加;对于A球,圆弧面对A的净冲量始终向右,在弹性碰撞过程中B球对A球的冲量向左,故对AB系统来说总动量增加是必然的.

为了研究系统全过程的动量变化,我们不妨引入一个复变函数:

设 $A=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$,$B=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$,则

$$A+iB = e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{in\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} =$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{1-\cos n\theta-i\sin n\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta} =$$

$$[(1-\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$(1-\cos n\theta-i\sin n\theta)]\cdot$$

$$[(1-\cos\theta-i\sin\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta)]^{-1} =$$

$$\frac{\cos\theta-1+\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} +$$

$$i\frac{\sin\theta+\sin n\theta-\cos(n-1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

因此,可以得到

$$A = \frac{\cos\theta-1+\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} =$$

$$\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)} - \frac{1}{2}$$

所以

$$\Delta p = kmv_0\left[\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}-1\right]$$

故系统全过程增加的动量为

$$\Delta p = 2kmv_0(\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta) =$$

$$kmv_0\left[\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}-1\right]$$

3 结束语

本文的分析产生于物理竞赛的学生中所进行的问题讨论,笔者认为,在学生学习物理竞赛的过程中,多进行这样的讨论,无论对于提升学生的理论水平、分析能力,还是对于提升学生物理学习的兴趣,都能起到较大的推动作用.

参考文献

1 祁平.二阶线性递推数列的研究.中学数学月刊,2005(6):27~29