非定态下坐标和动量间不确定关系的讨论

石凤良　景稳柱　李敬林

（唐山师范学院物理系　河北 唐山　063000）

（收稿日期：2018－06－11）

摘　要：主要讨论的是非定态下的不确定关系．具体研究一维无限深方势阱和一维线性谐振子非定态下，坐标和动量间的不确定关系．进一步验证不确定关系在非定态下依然成立．

关键词：不确定关系　非定态　无限深方势阱　线性谐振子

在量子力学中，不确定关系是一个重要法则．大多数的量子力学文献只是对不确定关系进行了一般证明，并在一维势阱的定态下进行了验证[1]，坐标和动量的不确定关系满足$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}\geqslant\frac{\hbar^2}{4}$[2]．本文将在一维势阱的非定态下验证坐标与动量间的不确定关系，加深对不确定关系的理解．

1　一维无限深方势阱非定态下不确定关系

为了讨论方便，选取 $t=0$ 时的非定态 $\Psi(x)$，令

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_n(x)+\varphi_m(x)\right]$$

其中 $\varphi_n(x)$ 和 $\varphi_m(x)$ 为一维无限深方势阱的能量本征态[3]，本征值分别为 $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$ 和 $E_m=\frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$（其中 μ 为粒子质量，n 和 m 为正整数，且 $n\neq m$）[3]．

下面计算坐标和动量在 $\Psi(x)$ 态下的均方偏差

$$\bar{x}=\int_\infty\Psi^* x\Psi\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{a}{\pi^2}\left[(-1)^{m-n}-1\right]\frac{4mn}{(m-n)^2(m+n)^2}\tag{1}$$

$$\overline{x^2}=\int_\infty\Psi^* x^2\Psi\mathrm{d}x=\frac{a^2}{3}+\frac{8a^2mn}{\pi^2(m-n)^2(m+n)^2}(-1)^{m-n}-\frac{a^2}{4n^2\pi^2}-\frac{a^2}{4m^2\pi^2}\tag{2}$$

$$\overline{p_x}=\int_\infty\Psi^*\hat{p}_x\Psi\mathrm{d}x=0\tag{3}$$

$$\overline{p_x^2}=\int_\infty\Psi^*\hat{p}_x^2\Psi\mathrm{d}x=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2a^2}+\frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2a^2}\tag{4}$$

由式(1)～(4)可得

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\frac{a^2}{12}-\frac{a^2}{4n^2\pi^2}-\frac{a^2}{4m^2\pi^2}+\frac{4mna^2\left[(-1)^{m-n}+1\right]}{\pi^2(m-n)^2(m+n)^2}-\frac{a^2}{\pi^4}\left[(-1)^{m-n}-1\right]^2\frac{16m^2n^2}{(m-n)^4(m+n)^4}\tag{5}$$

$$\overline{(\Delta p_x)}=\overline{p_x^2}-\overline{p_x}^2=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2a^2}+\frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2a^2}\tag{6}$$

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=-\frac{\hbar^2}{8}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2+(m^2+n^2)\left\{\frac{\pi^2\hbar^2}{24}-\frac{8m^2n^2\hbar^2\left[(-1)^{m-n}-1\right]^2}{\pi^2(m-n)^4(m+n)^4}+\frac{2mn\left[(-1)^{m-n}+1\right]\hbar^2}{(m-n)^2(m+n)^2}\right\}\tag{7}$$

对 $\Psi(x)$ 态下一维无限深方势阱，坐标和动量不确定关系结果进行讨论．

（1）当 $(m-n)$ 为奇数时

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}>\frac{\hbar^2}{4}(1.663\,8mn-2)>\frac{\hbar^2}{4}$$

（2）当 $(m-n)$ 为偶数时

作者简介：石凤良（1965－　），男，硕士，教授，研究方向为理论物理．

$$\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p)^2} > \left[\frac{4mn\hbar^2}{(m-n)^2(m+n)^2}(m^2+n^2)+\frac{\hbar^2}{4}(3.28mn-2)\right] > \frac{\hbar^2}{4}$$

所以可以得出结论，一维无限深方势阱非定态下坐标和动量间的不确定关系成立.

2　一维线性谐振子非定态下不确定关系

为了讨论方便，选取 $t=0$ 时的非定态 $\Phi(x)$，令

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_n(x)+\varphi_m(x)]$$

其中 $\varphi_n(x)$ 和 $\varphi_m(x)$ 为一线性谐振子能量本征态[4]，本征值分别为 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ 和 $E_m=(m+\frac{1}{2})\hbar\omega$（其中 n 和 m 为正整数，且 $n\neq m$）.

下面计算坐标和动量在 $\Phi(x)$ 态下的均方偏差

$$\bar{x}=\langle\Phi\mid x\mid\Phi\rangle=\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha}\left[(\sqrt{m+1}+\sqrt{n})\delta_{n,m+1}+(\sqrt{m}+\sqrt{n+1})\delta_{n,m-1}\right] \tag{8}$$

$$\overline{x^2}=\langle\Phi\mid x^2\mid\Phi\rangle=\frac{1}{2\alpha^2}\left[n+m+1+(\sqrt{mn}+\sqrt{n+1}\sqrt{m+1})\delta_{m,n}+\sqrt{n}\sqrt{m+1}\delta_{n-1,m+1}+\sqrt{m}\sqrt{n+1}\delta_{n+1,m-1}\right] \tag{9}$$

$$\overline{p_x}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*\hat{p}_x\Phi\mathrm{d}x=0 \tag{10}$$

$$\overline{p_x^2}=\langle\Phi\mid\hat{p}_x^2\mid\Phi\rangle=\langle\Phi\mid\hat{p}\hat{p}_x\mid\Phi\rangle=\frac{\alpha^2\hbar^2}{2}\left[(\sqrt{mn}+\sqrt{m+1}\sqrt{n+1})\delta_{m,n}+n+m+1-\sqrt{n}\sqrt{m+1}\delta_{n,m+2}-\sqrt{m}\sqrt{n+1}\delta_{n,m-2}\right] \tag{11}$$

由式(8)～(11)可得

$$\overline{(\Delta x)^2}=\frac{(n+m+1)}{2\alpha^2}+\frac{\sqrt{n}\sqrt{m+1}}{2\alpha^2}\delta_{n,m+2}-\frac{1}{8\alpha^2}(n+m+1+2\sqrt{m}\sqrt{n+1})\delta_{n,m-1}-\frac{1}{8\alpha^2}(n+m+1+2\sqrt{n}\sqrt{m+1})\delta_{n,m+1}+\frac{\sqrt{m}\sqrt{n+1}}{2\alpha^2}\delta_{n,m-2} \tag{12}$$

$$\overline{(\Delta p_x)^2}=-\frac{\alpha^2\hbar^2}{2}\sqrt{n}\sqrt{m+1}\delta_{n,m+2}+\frac{\alpha^2\hbar^2}{2}(n+m+1)-\frac{\alpha^2\hbar^2}{2}\sqrt{m}\sqrt{n+1}\delta_{n,m-2} \tag{13}$$

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2}{4}\left[(n+m+1)^2-n(m+1)\delta_{n,m+2}-m(n+1)\delta_{n,m-2}-\frac{1}{4}(\sqrt{n+1}+\sqrt{m})^2(n+m+1)\delta_{n,m-1}-\frac{1}{4}(\sqrt{m+1}+\sqrt{n})^2(n+m+1)\delta_{n,m+1}\right] \tag{14}$$

对 $\Phi(x)$ 态下一维线性谐振子，坐标和动量间不确定关系结果进行讨论.

(1) 当 $n=m+2$ 时（m,n 为整数），则有坐标和动量不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2}{4}(3m^2+9m+7)>\frac{\hbar^2}{4}$$

(2) 当 $n=m-2$ 时（m,n 为整数），则有坐标和动量不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2}{4}(3m^2-3m+1)>\frac{\hbar^2}{4}$$

(3) 当 $n=m-1$ 时（m,n 为整数），则有坐标和动量不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2m^2}{2}>\frac{\hbar^2}{4}$$

(4) 当 $n=m+1$ 时（m,n 为整数），则有坐标和动量不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2}{4}(2m^2+4m+2)>\frac{\hbar^2}{4}$$

(5) 当 $n\neq m+2,m-2,m-1,m+1$ 时（且 $n\neq m$，m,n 为整数），则有坐标和动量不确定关系为

$$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p_x)^2}=\frac{\hbar^2}{4}(n+m+1)^2>\frac{\hbar^2}{4}$$

所以可以得出结论，一维线性谐振子非定态下坐标和动量间的不确定关系成立.

3　结论

通过对一维无限深方势阱和一维线性谐振子的非定态下，坐标和动量间不确定度的分析，可以验证得到结论：非定态下不确定关系依然成立. 即非定态下如果 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 的对易关系为 $\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}=i\hat{k}$（$\hat{k}$ 是一个

“物理学科核心素养”导向下的高中物理概念教学设计

周　玮
（北京师范大学附属中学　北京　100052）

（收稿日期：2018－09－01）

摘　要：新课程改革以培养学生的学科核心素养为理念.物理概念既是物理学大厦的基石，也是物理教学中培养学生核心素养的重要载体.探讨了物理概念教学与学科核心素养的内在联系，强调了学科核心素养导向下的高中物理概念教学设计中应注意的几个关键问题.

关键词：学科核心素养　物理概念　教学设计

随着2017版新课标的颁布，标志着新课程改革正式启动，这一次的改革则是将学科核心素养教育作为主要的教学目标.如何在教学过程中真正以学生为中心，根据每位学生的知识和经验，满足他们独特的人格成长需要，培养学生的学科核心素养是课堂教学改革应不断思考的问题.

学科核心素养是学科育人价值的集中体现，是学生通过学科学习而逐步形成的正确的价值观念、必备品格和关键能力.物理学科核心素养主要包括“物理观念”“科学思维”“科学探究”和“科学态度与责任”4个方面.

物理概念既是物理学大厦的基石，也是核心素养

算符或普通的数），则有 $\overline{(\Delta\hat{F})^2}\cdot\overline{(\Delta\hat{G})^2}\geqslant\frac{\bar{k}^2}{4}$（其中 $\bar{k}$ 为 $\hat{k}$ 的期望值）.

参 考 文 献

1　顾樵.量子力学Ⅱ.北京：科学出版社，2014.319～361
2　Pang X F . Uncertainty features of microscopic particles described by nonlinear Schrodinger equation. Physica B Condensed Matter, 2009, 404(21):4 327～4 331
3　周世勋.量子力学教程.北京：高等教育出版社，2009.76～82
4　曾谨言.量子力学教程.北京：科学出版社，2003.35～39

Discussion on the Uncertain Relationship between Coordinate and Momentum under Non-stationary State

Shi Fengliang　Jing Wenzhu　Li Jinglin
(Department of Physics, Tangshan Normal University, Tangshan, Hebei　063000)

Abstract: In this paper, the uncertain relations under non-stationary state are analyzed. Specifically, the uncertain relations between the coordinate and momentum of a one-dimensional infinitely deep square potential well and a one-dimensional linear harmonic oscillator under non-stationary state are analyzed. It is further verified that the uncertainty relations are still established in the non-stationary state.

Key words: uncertain relation; non-stationary state; infinitely deep square potential well; linear harmonic oscillator