

基于《自然哲学之数学原理》对牛顿第二定律的再讨论

谈元凯

(上海市陆行中学 上海 200136)

(收稿日期:2018-07-31)

摘要:通过《自然哲学之数学原理》(下文均用“《原理》”表示)中的“定义1”“定义2”和“定律II”,从动量的角度对牛顿第二定律的内容及表达式所体现出的内涵进行再讨论,进一步加深对牛顿第二定律的理解与认识,提升学生核心素养中物理观念和物理思维的认识水平.

关键词:自然哲学之数学原理 牛顿第二定律 动量

1 问题的提出

牛顿第二定律是高中物理力学体系中的一个重要教学内容.作为一种物理观念,从定律的内容上看,它是在研究物体受力不平衡时,力与运动之间关系的重要规律;从物理思维上看,研究牛顿第二定律的内容时涵盖了丰富的物理思维内涵.学生通过定律的学习,可以进一步提升对力学体系中物理观念和物理思维的认识水平.

目前高中物理教材中对于牛顿第二定律的表述如下:“物体的加速度 a 与受到的作用力 F 成正比,与物体的质量 m 成反比,写作

$$F = ma \quad (1)$$

基于这种表述,教师在讲解牛顿第二定律时,一般都是从“因果性”“瞬时性”“独立性”等几个方面进行讲解和教授,学生也是单单地从“力”“加速度”“运动”的层面进行学习和理解.

但是在《原理》一书中,牛顿在建立第二定律时的表述与目前物理教材上的文字表述有所不同.所以学生根据物理教材上的文字进行理解,会忽略一些牛顿在建立定律时所表达的其他内涵.

2 《原理》中的定义和定律

在《原理》^[1]一书的所有章节之前,牛顿首先就对一些物理量进行了定义,并提出了运动规律:

“定义1:物质的量是物质的量度,可由其密度和体积共同求出.”

“定义2:运动的量是运动的量度,可由速度和物质的量共同求出.”

“定律II:运动的变化正比于外力,变化的方向沿外力作用的直线方向.”

通过上述内容,可以发现:

定义1描述的是“物质的量”,但根据其大小的运算来看,就是我们现在规定的物理量“质量 m ”,即

$$m = \rho V \quad (2)$$

定义2描述的是“运动的量”,从它的文字表述可以发现,它是高中需要学习的另一个物理量“动量 p ”,即

$$p = mv \quad (3)$$

定律II是牛顿第二定律的内容,但其内容中清楚地表明:“运动的变化正比于外力”,而通过定义2可以知道,这种“运动的变化”是通过“动量 p ”来衡量的,即牛顿第二定律的数学表达式可以用微分形式改写为

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (4)$$

3 牛顿第二定律的再讨论

经过对《原理》一书中牛顿第二定律的内容和

表达式的解读,相比现行物理教材中牛顿第二定律的表述,可以做进一步的讨论.

3.1 牛顿第二定律可以反映出力对物体的两种不同效应

根据牛顿第二定律的不同表述,分别对应了式(1)、(4)两种不同的数学表达式.

前者是力的一种瞬时效应^[2].由于式子中不包含“时间”这个物理量,所以当物体受到的合外力发生变化时加速度也会瞬间发生变化;合外力变为零,加速度也瞬间变为零;并且加速度的方向也会随着合外力方向的变化而变化.

后者表示在质量不变时,力的一种时间积累效应^[2].通过公式变形,得

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5)$$

通过分析式子,可以知道,力对物体要持续作用一段时间 t ,物体的动量 \mathbf{p} 才发生变化.或者说力改变物体的运动状态需要时间的积累.

相比力的两种不同效应,在实际应用中却有着各自的特点.式(1)中,加速度 \mathbf{a} 起到了连接力学量和运动学量的枢纽作用,使得在求解运算中可以已知受力情况求运动情况,或者已知运动情况求受力情况.

而在式(5)中,只需要知道同一物体初末两个状态的速度 \mathbf{v} 就可以进行进一步的求解,这会给我们带来很大的方便.例如碰撞问题中,碰撞的时间极短,且这一短暂时间内物体间的碰撞力是急剧变化的变力,因此无法确定其加速度 \mathbf{a} ,所以式(1)是不可能解决此类问题的.

3.2 牛顿第二定律只能适用于物体平动的情况

以刚体转动为例^[3].如图1所示,某物体以其自身某一点为轴自转,其中有一质量为 m_i 的微元在做曲线运动,某一时刻的速度为 \mathbf{v} ,根据运动学知识可以判定该质点的运动状态在不断发生变化.假设该物体受到的外力为 \mathbf{F}_i ,考虑到外力与转轴之间的位矢 \mathbf{r} ,外力会产生力矩,则转动规律应该写成

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (6)$$

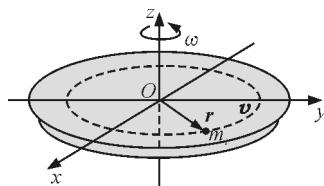


图1 物体以自身某一点为轴自转

通过积分变换

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \int \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int \frac{d}{dt}(m_i r^2 \boldsymbol{\omega})$$

$$\text{得} \quad \mathbf{M} = J \int \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = J\boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

其中 \mathbf{M} 为合力矩, J 为该物体的转动惯量, $\boldsymbol{\alpha}$ 为该物体的角加速度.

对比物体的平动,可以直观地发现它们之间的因果关系有所不同:物体平动时合外力是产生加速度的原因;物体在转动时合力矩是产生角加速度的原因.虽然表达式的形式相同,但是其背后的物理意义却有着极大的差异.所以,牛顿第二定律只能适用于物体平动的时候.

3.3 通过对牛顿第二定律表达式的定性半定量分析 可以获得动能表达式的系数

在高中物理教学中,对于动能的表达式 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 的讲解通常是在初速度为零的匀变速直线运动中外力做功使得物体获得能量的思路去推演,最终通过化简,得到获得的能量在数值上为 $\frac{1}{2}mv^2$,从而将该数值定义为动能的大小.这种方法,一方面是“隐晦地”将动能定理提前运用在动能概念的建立上,另一方面在建模的过程中是从特殊到一般的情况,无法说明其推导过程具有普适性.并且在后续课本实验内容的安排上,通过“DIS探究物体动能大小”的实验,建立位移 s 与质量和速度平方 mv^2 的关系,可以间接证明 $E_k \propto mv^2$,但是也无法通过图线得到比例系数“ $\frac{1}{2}$ ”.

基于如此的教学现状,并不符合现行核心素养要求中学生对于物理观念和物理思维学习的要求,甚至有一些“伪探究”的痕迹.

其实,根据《原理》中牛顿第二定律的动量表述,利用定性半定量的方法,可以较为严谨地得出动能的表达式.

以一维质点的运动为例,如图2所示,某质点由于受到外力 F 的作用从静止开始沿着水平的 x 轴做变速运动,经过一段元位移 dx 后速度为 v .根据牛顿第二定律,有

$$F \cdot dx = \frac{dp}{dt} \cdot dx \quad (8)$$

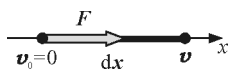


图2 一维质点受外力时的变速运动

对于式(8)等号左边,采用量纲分析法^[4]

$$\dim F = \text{LMT}^{-2}$$

$$\dim dx = \text{L}$$

即

$$\dim(F \cdot dx) = \text{L}^2 \text{MT}^{-2}$$

是能量的量纲.所以等式右边, $\frac{dp}{dt} \cdot dx$ 应该为某一能量大小的表达式.而此时物体由于受到外力的作用,迫使物体的运动状态由静止增加到速度 v ,而物体正是由于运动获得了能量,即定义为动能 E_k .取其标量式,通过积分,得

$$E_k = \int_0^v \frac{dp}{dt} dx = m \int_0^v v \frac{dx}{dt} = m \int_0^v v dv = \frac{1}{2} mv^2 \quad (9)$$

上面的证明撇除了对于复杂变速运动物理过程的分析,结合《原理》中牛顿第二定律的动量表述,仅仅依靠量纲分析和半定量的算法确定了动能大小的表达式,整个推演过程相对简洁.

4 总结

本文主要通过《原理》中牛顿第二定律的动量表述,一方面与目前高中教材中的牛顿第二定律的表述进行了比较与讨论,了解到力对物体的两种不同效应;第二方面,讨论了物体平动与转动时两种不同的因果关系,即平动时合外力是产生加速度的原因,转动时合力矩是产生加速度的原因,所以牛顿第二定律只能适用于物体平动的情况;第三方面则是利用牛顿第二定律的动量表述,通过定性半定量的方法,推导出动能的表达式.

由此可见,对于牛顿第二定律的再讨论是极具意义的.作为一条极其重要的运动定律,它贯穿了整个经典力学的始终.本文对于牛顿第二定律的再讨论以及相应的思考方法既可以供同行在该定律的教学中提供一定的素材参考,同时也可以深入浅出地供学有余力的高中学生在物理观念和物理思维的角度有一定的提升,真正提高学生的核心素养.

参考文献

- 1 牛顿.自然哲学之数学原理.王克迪,译.北京:北京大学出版社,2006.1,8
- 2 王秉谦.趣味课外物理.北京:北京理工大学出版社2006.61~62
- 3 马文蔚.物理学(第5版)(上册).北京:高等教育出版社,2006.119~120
- 4 赵凯华.定性半定量物理学(第2版).北京:高等教育出版社,2008.60~61

Re-discussion about the Newton's Second Law Based on the *Mathematical Principles of Natural Philosophy*

Tan Yuankai

(Luhang Middle School, Shanghai 200136)

Abstract: Have a discussion about the Newton's Second Law's content and connotation once again by using the law's momentum statement through the "Definition 1", "Definition 2" and "Law II" which in the book "Mathematical Principles of Natural Philosophy" (hereafter termed "Principles"). It can not only further deepen the comprehension and the cognition of the Newton's Second Law but also improve the levels of physics concepts and physics thoughts on the key competence.

Key words: mathematical principles of natural philosophy; Newton's second law; momentum