

涂黄油吐司面包落地问题的力学分析*

米广宇

(中国农业大学烟台研究院 山东 烟台 264043)

卓启同 吕洪凤

(中国农业大学理学院 北京 100083)

(收稿日期:2018-08-22)

摘要:对一个有趣的墨菲定律经典现象进行了分析,为什么人们常说涂有黄油的吐司面包落地时总是有黄油的一面着地?涂黄油的吐司面包从桌面上沿一定角度自由掉落是典型的转动问题.以生活中最常见的切片长方体吐司面包为例,从刚体转动的角度建立物理模型,分析了它何时会从桌面上掉落,以及掉落至地面过程中的运动情况,得到了涂黄油吐司面包落地时的翻转角公式.推出吐司面包落地时黄油面着地与否,与面包的长度、面包与桌面的初始倾角、下落高度等有关.

关键词:墨菲定律 转动 吐司面包

著名的墨菲定律^[1]指出:如果有两种或两种以上的选择,而其中一种将导致灾难,则必定有人会作出这种选择.(If there are two or more ways to do something, and one of those ways can result in a catastrophe, then someone will do it.)

在生活中常常能看到这种观点:如果一片涂黄油的吐司面包从桌上掉落,一定是涂黄油面着地——因为这是最坏的结果.那么这个十分契合墨菲定律的现象为何会时常发生呢?这到底是偶然概率问题,还是必然的物理现象呢?

对于这个问题,前人已经有过一些研究,例如文献^[1]用牛顿方程法和拉格朗日方程法对涂黄油吐司面包落地的过程建立了物理模型,并对涂黄油面包翻转角在不同条件下的角度做出了讨论,文献^[2]则是从力学原理的角度,运用“降落伞效应”对此问题做出了定性分析^[2].

现从一全新视角,将形状和大小相对稳定的吐司面包看作刚体,并运用动力学的相关知识对此进行分析.

1 涂黄油吐司面包落地前的情景模拟

如图1所示,给出涂黄油吐司面包从桌边滑落前的示意图,涂黄油的一面在上.为简化分析,假设黄油在吐司面包上涂抹均匀.涂抹上的薄层黄油的质量(约3 g)远小于吐司面包片的质量(约35 g),它对黄油吐司面包片整体的质心位置、惯性大小及其后的转动过程影响可以忽略^[7].

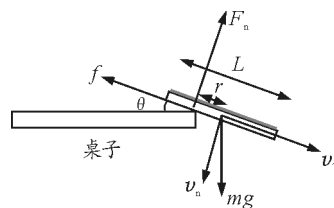


图1 涂黄油吐司面包从桌边滑落示意图

假设吐司面包与黄油涂层的总质量为 m , 长度为 L , 面包与桌面的夹角为 θ , 面包的质心离开桌边的一小段距离为 r , 面包的质心速度 v 可分解为平行于面包平面的速度 v_t (以速率标示) 与垂直于面包平面的速度 v_n (以速率标示), 面包绕质心轴的转动

* 国家自然科学基金资助,项目编号:11605287;中国农业大学教改项目“互联网+时代新授课模式的探索”资助,项目编号:201634

作者简介:米广宇(1998-),男,在读本科生.

通讯作者:吕洪凤(1982-),女,博士,副教授,主要从事大学物理教学和理论物理研究工作.

角速度为 ω ,转动惯量为 I_c .下面分析涂黄油吐司面包片从桌面掉落的条件.

分析面包掉落前的受力,绕面包与桌面接触点转动的力矩来自于重力 mg ,摩擦力 f 和支持力 F_n .对绕过接触点的转动无贡献,由转动定律可得

$$m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right) \frac{d\omega}{dt} = mgr \cos \theta \quad (1)$$

对于式(1)进行计算,乘以 2ω 并代入初始条件 $\omega = 0, \theta = 0$,有

$$\int_0^\omega m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right) 2\omega d\omega = \int_0^\theta 2mgr \cos \theta d\theta$$

得到

$$\omega^2 = \frac{6gr \sin \theta}{\frac{L^2}{4} + 3r^2} \quad (2)$$

质心加速度由系统合外力决定.以质心为坐标原点,平行于面包平面的方向为 x 轴,垂直于面包平面向下的方向为 y 轴.假设面包片倾斜到 φ 角度时开始沿斜面下滑,由受力分析知

$$mg \cos \theta - F_n = mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (3)$$

$$f = mg \sin \theta + mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (4)$$

$$f = \mu F_n \quad (5)$$

由式(3)~(5)可知,沿着速度 v_x 方向的合力大于最大静摩擦力时,面包片跌落.相应的最大静摩擦因数

$$\mu_s = \frac{mg \sin \theta + mr \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2}\right)}{mg \cos \theta - mr \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2}\right)} \quad (6)$$

面包片下滑对应夹角为

$$\frac{\pi}{2} > \varphi > \arctan \frac{\mu}{1 + 9 \left(\frac{2r}{L}\right)^2} \quad (7)$$

涂黄油吐司面包离开桌面时的夹角与面包和桌面间的摩擦系数有关^[5~7],与面包长度 L 和面包质心距离桌边距离 r 有关.

2 涂黄油吐司面包翻转过程分析

若取极限情况,不考虑面包从桌面滑落时摩擦力所做的功则在脱离桌面时,其势能之差将完全转变成质心的动能和绕质心轴的转动动能

$$mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (8)$$

其中,涂黄油吐司面包绕其质心轴的转动惯量为 $\frac{mL^2}{12}$,速度 $v^2 = v_x^2 + v_n^2$,同时脱离桌面处的垂直于面包平面的速度与角速度间有

$$v_n = \frac{L}{2} \omega$$

从而得到

$$gL \sin \theta = \frac{4}{3} v_n^2 + v_x^2 \quad (9)$$

假设面包从开始倾斜到完全滑离桌面的时间为 T ,且在滑动中面包与桌面的夹角 θ 不变,则根据冲量定理,沿着 x 方向有

$$mg \sin \theta T = m v_x \quad (10)$$

如图1所示, r 为滑动中任意时刻质心到转动点之间的距离,取值区间为 $\left(0, \frac{L}{2}\right)$.面包相对于转动点的重力矩为 $mgr \cos \theta$.如果将距离变量 r 表示为时间常量 T 的函数,则可以求出该时间段内重力矩的平均值,并以该平均值取代随时变化的重力矩.鉴于 T 对应的时间非常短,可假设该段时间内 v_x 方向的加速度为常量,即 $r = at^2$,从而有

$$\langle r \rangle = \int_0^T \frac{r}{T} dt = \int_0^T \frac{at^2}{T} dt = \frac{1}{3} a T^2 = \frac{L}{6} \quad (11)$$

相应地,重力矩的平均值为 $mg \frac{L}{6} \cos \theta$.

根据角动量定理(冲量矩定理):力矩在时间上的累积等于角动量的改变量,结合式(10),在 T 时刻有

$$I \omega = mg \frac{L}{6} T \cos \theta = \frac{L}{6} m v_x \cot \theta \quad (12)$$

离开桌面前,根据平行轴定理,面包绕接触点的转动惯量为

$$I = I_c + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

此刻的角动量为

$$I \omega = \frac{1}{3} mL^2 \omega = \frac{1}{3} mL^2 \frac{2v_n}{L} = \frac{2L}{3} m v_n \quad (13)$$

比较式(12)和式(13)可得

$$v_n = \frac{1}{4} v_x \cot \theta \quad (14)$$

将式(14)代入式(9)得到

$$v_n^2 = \frac{gL \sin \theta}{\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{\cot^2 \theta}\right)} \quad (15)$$

在脱离桌面后的自由下落过程中,面包的角动量守恒,其绕质心轴旋转的角速度不变,恰为 T 时刻脱离桌面时的角速度. 假设桌面高 h , 下落时间在不考虑空气阻力时为

$$t = \sqrt{\frac{2\left(h - L \frac{\sin \varphi}{2}\right)}{g}}$$

可近似取下落时间

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

则面包落到地面时的空中翻转角为

$$\omega t = \frac{2v_n}{L} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

总翻转角度 Ψ 为

$$\Psi = \theta + \omega t = \theta + \sqrt{\frac{8h \sin \theta}{\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{\cot^2 \theta}\right) L}} \quad (16)$$

由式(16)可以看出,涂黄油吐司面包从桌面掉落至地上过程中,总翻转角度与桌高 h , 面包片长度 L 和涂黄油吐司面包与桌面的夹角 θ 有关. 而在其翻转时,显然涂黄油面着地的条件是总翻转角度 Ψ 处于区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

当人处于一个舒适的用餐姿势时——即人体直立、两手掌平放在桌面上不必弯或屈肘关节时,餐桌具有的高度约为 $h_s = 780 \text{ mm}$ ^[3,8]. 常见吐司面包片的规格为 $100 \text{ mm} \times 95 \text{ mm} \times 13 \text{ mm}$ ^[4], 即 $L = 100 \text{ mm}$. 涂黄油吐司面包离开桌面时,夹角 θ 的初始值由式(7)给出,为简化处理,取其区间为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, h 的取值范围选取最适高度 $h_s = 780 \text{ mm}$ 的 $50\% \sim 150\%$, 即 $[0.39 \text{ m}, 1.17 \text{ m}]$. 运用 Matlab 软件可画出总翻转角度 Ψ 随 h 和 θ 的三维变化图.

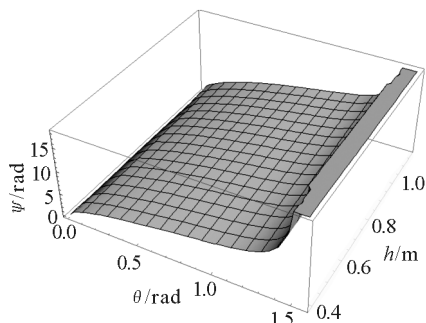


图2 总翻转角度 Ψ 三维变化图

从图中可知,翻转角 Ψ 取值区间对应为 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$.

3 公式在实际生活中的应用

将 $L = 100 \text{ mm}$ 和 $h = 780 \text{ mm}$ 代入式(16), 可得到不同初始下滑角 θ 对应的总翻转角度 Ψ .

表1 总翻转角度 Ψ

θ/rad	0.175	0.349	0.524	0.698	0.873	1.047	1.221	1.396
Ψ/rad	2.619	2.835	2.687	2.482	2.282	2.094	1.915	1.741

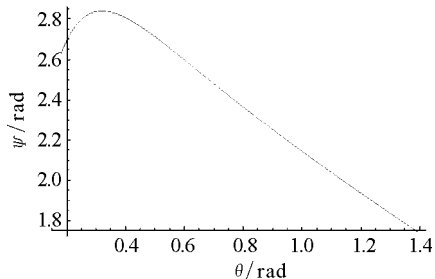


图3 总翻转角度 ψ 图(弧度)

从表1和图3可以看出,涂黄油吐司面包总翻转角度 Ψ 都处于区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 此时吐司面包翻转后总是黄油面落地. 这种现象与日常生活中我们所

使用的特定的餐桌规格及吐司面包片规格有关,也就解释了为什么我们在日常生活中会产生“涂黄油吐司面包落地一定是黄油面着地”这一印象.

参考文献

- 1 黄莹,余守宪. 力学原理与墨菲法则. 现代物理知识, 2002(05):3~5
- 2 李洪涛. “面包片落地时几乎总是黄油面朝下”的力学原理究竟是什么. 现代物理知识, 2003(4):68
- 3 许荣发. 议家具的高度. 家具与环境, 1996(4)
- 4 Stevenson W, Bacon M E. More on falling toast. Physics Teacher, 1997, 35(35):484~485

(下转第17页)

仅锻炼了自己灵活运用知识的能力和动手能力,也训练了分析问题和解决问题的能力,这些收获让他们非常有成就感.当项目小组成员站在全班同学面前做项目总结报告,并把作品展现在全班同学面前时,不仅赢得了其他同学羡慕和赞赏的目光,更是激发了其他同学的兴趣和参与的激情,当然也很大程度上提高了理论课堂教学的吸引力.笔者想这应该是理论课程与专业实验无缝对接后所期待的效果了:充分激发学生的学习兴趣与参与热情,在“学”与“习”的过程中有效地训练学生灵活运用知识的能力、动手能力以及创新思维的能力,也培养了学生团结协作精神和敢于探索的精神.

4 总结

实现理论课堂教学与专业实验的开设无缝对接,可以解决多年来学生普遍诟病的实验项目开设与理论知识关联性不强的现状;结合理论课程内容设置真正开放性的、非黑匣子式的自主创新设计实验,不仅能激发学生的创新思维,更能有效锻炼学生

运用知识的能力和动手能力.以电磁学理论课与相关专业实验的无缝对接为例子,期待扩展到其他专业课力学、热学、光学与相关专业实验项目的结合,甚至推广到量大面广的课程“大学物理”和“大学物理实验”的无缝对接.这是将“以学生为中心”的教学理念落到实处的具体体现.

参考文献

- 1 李智华,陆培祥.电磁学理论教学与实验如何有效结合的思考.物理与工程,2017,27(1):73~76
- 2 李帅龙,李智华.平行板电容器内电解质受力问题剖析.物理通报,2016(8):19~22
- 3 李智华,熊曹水,项林川,等.电磁学教学新模式的探索与实践.物理通报,2013(9):13~16
- 4 崔连敏.浅谈大学物理实验教学存在的问题和方法.大学物理实验,2015,28(6):124~126
- 5 赵婷婷.大学物理实验教学与创新.大学物理实验,2014,27(5):100~102
- 6 张杨,孙晶华,李庆波,等.有利于学生创新精神培养和能力培养的物理实验教学改革与实践.大学物理实验,2015,28(4):116~119
- 7 Bacon M E,Heald G,James M. A closer look at tumbling toast. American Journal of Physics, 2001, 69(1):38~43
- 8 Borghi R. On the tumbling toast problem. European Journal of Physics,2012,33(33):1 407~1 420
- 9 Matthews R A J. Tumbling toast, Murphy's Law and the fundamental constants. European Journal of Physics, 1995,16(4):172~176
- 10 Master A M,Lasser R P,Beckman G. Tables of average weight and height of Americans aged 65 to 94 years: relationship of height and weight to survival. Journal of the American Medical Association, 1960, 172 (172): 658~662

(上接第13页)

Mechanical Analysis on Buttered Toast Bread Landing

Mi Guangyu

(Yantai Institute of China Agricultural University, Yantai, Shandong 264043)

Zhuo Qitong Lyu Hongfeng

(College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083)

Abstract: We investigate an interesting question: Why people think that the final state is usually butter-side down when the toast is tumbling from the table. It is a typical problem of rigid body rotation, so in the study reported here we tend to obtain an accurate description of the behavior of tumbling toast. It analyzes the movement of when the toast drops from the desktop, and when it drops to the ground. Furthermore, we obtain a formula for tumbling buttered toast landing and show that toast does indeed have an inherent tendency to land butter-side down for a wide range of conditions, which depends on the length of toast, the initial angle of inclination between toast and desk, and its falling height.

Key words: murphy's law; rotation; tumbling toast