高中物理中的平均值问题*

王朝祥
（北京市第八十中学　北京　100102）

（收稿日期：2018－09－03）

摘　要：物理学中许多物理量的变化过程是非均匀的.引入平均的思想，可以用一个等效的常量代替变量，或者用一个均匀的变化过程代替非均匀变化的过程，从而对物理量的变化做出整体的、概括性的描述.不同平均值的数学运算方式不同，其物理意义也不同.计算物理量的平均值时要注意平均的对象、平均的区域、平均的方法这3个问题.

关键词：平均思想　等效替代　平均的对象　平均的区域　平均的方法

1　平均值的基础知识

1.1　不连续量的平均值

如果给出一系列数值 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, x_n > 0$，以不同的数学运算方式可以取得不同类型的平均值.

算术平均值

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

几何平均值

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

调和平均值

$$H = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

方均根

$$R = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

加权平均值

$$W = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

其中加权系数之和

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

不同平均值之间的大小关系：$H \leqslant G \leqslant A \leqslant R$，当 $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ 时取等号.

1.2　连续函数的平均值

连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均值 $\bar{y}$，等于函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的定积分除以区间长度，即

$$\bar{y} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x}{x_2 - x_1}$$

如图1所示，其几何意义为：在区间 $[x_1, x_2]$ 范围内，函数曲线下所围曲边梯形的面积等于矩形 $ABCD$ 的面积，矩形的高即为函数的平均值.

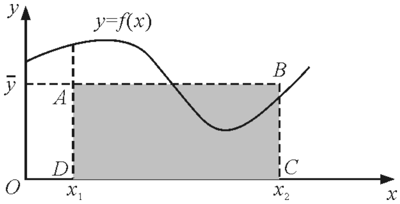

图1　$y-x$ 图像

若将积分区间分成 n 个等份（$n \to \infty$），每一份记为 Δx，对应的函数值为 y_i，则

$$\bar{y} = \frac{y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x}{n \Delta x} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

由此可见，连续函数的平均值与不连续量的算数平均值在本质上是一致的.

2　平均值在物理中的应用

2.1　平均值问题中的等效替代思想

物理学需要研究各种变量，许多物理量的变化

* 北京市中小学名师发展工程首都师范大学基地研究成果.
作者简介：王朝祥（1977－　），男，中教高级，研究方向为高中物理与数学课程整合.

过程是非均匀的，研究起来比较困难. 引入平均的思想，可以用一个等效的常量代替变量，或者用一个均匀的变化过程代替非均匀的变化过程，从而对大量的同类变量或非均匀变化的过程做出整体的、概括性的描述. 不同平均值的数学运算方式不同，其物理意义也不同.

在测定性的物理实验中，对待测物理量进行多次测量，然后把各次的测量结果取算术平均值，以此作为待测物理量的测量值，可以有效地减小实验过程中的偶然误差.

把算术平均值作为测量结果，可以减少测量的偶然误差，但对系统误差无能为力. 在有些实验中，用几何平均值处理数据，可以消除因实验仪器的不对称造成的系统误差. 例如，用天平测量物体质量时，采用复称法可以消除因天平两臂不严格等长所引起的误差；用共轭法测透镜焦距时，若两次实验中像长分别为 a 和 b，则物体的长度 $l=\sqrt{ab}$.

如果某个物理量的平均值跟参与平均的各个量在总体中的权重有关，就要用到加权平均值. 例如单向直线运动的平均速度、混合物的密度(不考虑总体积变化)、混合物的比热容、混合物的平均摩尔质量、质心坐标，等等. 作为特例，如果各个量的权重相同，加权平均值就等于算术平均值.

调和平均值 H 是各个量倒数的算术平均值的倒数，在中学物理里有几种典型应用. 例如：电路中有 n 个不同的电阻 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 并联，从对电流的阻碍作用来看，这些电阻可以等效地看作 n 个相同的电阻 R_h 并联，R_h 即为这 n 个电阻阻值的调和平均值；电容器的串联也有类似的规律.

温度是分子热运动剧烈程度的标志，温度越高，分子平均动能越大. 分子平均平动动能是各个分子平动动能的平均值，即

$$\bar{E}_\mathrm{k}=\frac{\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\cdots+\frac{1}{2}mv_n^2}{n}=\frac{1}{2}m\frac{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}{n}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

结合 $\bar{E}_\mathrm{k}=\frac{3}{2}kT$ 可得：温度升高，分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 增大，分子热运动越剧烈.

有定积分作为数学工具，计算连续函数的平均值就不再困难. 例如，力的空间累积是功，力对位移的平均值可以表述为

$$\overline{F_x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}F(x)\mathrm{d}x}{x_2-x_1}$$

借助力对位移的平均值，可以将变力做功问题等效地转化为恒力做功问题. 类似的平均值问题还有力对时间的平均值、平均速度、平均加速度、平均电流、平均功率等.

交变电流的有效值是根据电流的热效应定义的，即如果交变电流 $i(t)$ 一个周期 T 内在电阻 R 上产生的热量与某一恒定电流 I 相同时间内在电阻 R 上产生的热量相等，恒定电流 I 称作交变电流 $i(t)$ 的有效值. 即

$$\int_0^T i^2(t)R\mathrm{d}t=I^2RT$$

有效值

$$I=\sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}{T}}$$

例如，正弦交流电 $i(t)=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)$ 的有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t}=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$$

借助微元思想可以体会，交变电流的有效值 I 实际上是一个周期内电流的方均根.

2.2　应用平均值时要注意的几个问题

物理量的各种平均值具有丰富的物理意义，计算物理量的平均值时要注意平均的对象、平均的区域、平均的方法这 3 个问题.

平均值的计算都有具体的对象. 同一个物理量，若所取的平均对象不同，计算所得的平均值也就不同. 辨别平均的对象，解决的是“对什么取平均”的问题. 例如，力对位移的平均值等于该力所做的功与所对应位移的比值，力对时间的平均值等于该力的冲量与所对应时间的比值，这两个平均值具有不同的物理意义.

任何物理量的变化都要经历一个过程，计算物理量的平均值时，必须清楚是在哪段时间间隔内或者哪个位移区域内取平均. 平均区域不同，平均值的计算结果也就不同. 例如，若将物体做自由落体运动的总时间分为相等的前后两段，这两段时间内的平均速度之比为 1 ∶ 3；若将物体做自由落体运动的总

位移分为相等的前后两段,这两段位移内的平均速度之比为 $1:(\sqrt{2}+1)$.

不同类型的平均值所对应的数学运算方法不同,其物理意义也就不同.计算平均值时,要根据具体的物理情景和物理问题的需求,选取不同的平均方法.

3　典型问题分析

【例 1】某物体做匀加速直线运动,在一段时间内其速度由 v_1 增加到 v_2,求该物体在这段时间内的平均速度及其在位移中点的瞬时速度.

解析:物体的加速度记为 a,加速时间

$$t=\frac{v_2-v_1}{a}$$

位移

$$s=\frac{v_2^2-v_1^2}{2a}$$

其平均速度

$$\bar{v}=\frac{s}{t}=\frac{\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2a}}{\dfrac{v_2-v_1}{a}}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

将物体在位移中点的瞬时速度记为 $v_{\frac{s}{2}}$,可以分别对前半段和全程列式

$$v_{\frac{s}{2}}^2-v_1^2=2a\,\frac{s}{2}$$

$$v_2^2-v_1^2=2as$$

联立解得,物体在位移中点的瞬时速度

$$v_{\frac{s}{2}}=\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2}{2}}$$

点拨:在匀加速直线运动中,中间时刻的瞬时速度(平均速度)等于始末速度的算术平均值,位移中点的瞬时速度等于始末速度的方均根.

若将物体做直线运动的位移分为相等的两段,前半段的平均速度为 v_1,后半段的平均速度为 v_2,则全程的平均速度

$$\bar{v}=\frac{2s}{\dfrac{s}{v_1}+\dfrac{s}{v_2}}=\frac{2}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}}$$

此为 v_1 和 v_2 的调和平均值.

另外,若将物体的直线运动分为前后两段,第一段运动的时间和平均速度分别为 t_1 和 v_1,第二段运动的时间和平均速度分别为 t_2 和 v_2,则全程的平均速度

$$\bar{v}=\frac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2}$$

此为 v_1 和 v_2 的加权平均值.

请读者结合本题中 4 种平均速度的计算,体会不同类型的平均值在物理意义上的区别.

【例 2】已知某正弦交流电的瞬时电流 $i=I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$,分别计算在 $0\sim\dfrac{T}{2}$,$0\sim T$ 时间内电流对时间的平均值.

答案:在 $0\sim\dfrac{T}{2}$ 时间内

$$\bar{I}_1=\frac{\int_0^{\frac{T}{2}}I_{\mathrm{m}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\dfrac{T}{2}-0}=\frac{2}{\pi}I_{\mathrm{m}}$$

在 $0\sim T$ 时间内

$$\bar{I}_2=\frac{\int_0^{T}I_{\mathrm{m}}\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{T-0}=0$$

点拨:本题中,电流对时间的平均值与时间段(平均的区域)的选取有关.

不同的物理过程内,物理量的平均值一般不同.因此,叙述物理量的平均值时要明确所对应的物理过程.

【例 3】如图 2 所示,水平弹簧振子的质量为 m,弹簧的劲度系数为 κ,振幅为 A,在四分之一周期内振子从平衡位置运动到右端最大位移处,求此过程中弹力对位移的平均值 $\overline{F_x}$ 和弹力对时间的平均值 $\overline{F_t}$.

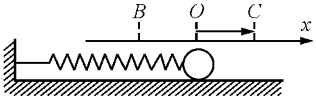

图 2　例 3 题图

解析:弹力与位移的函数关系为 $F=-\kappa x$,此过程中弹力对位移的平均值

$$\overline{F_x}=\frac{\int_0^{A}(-\kappa x)\,\mathrm{d}x}{A-0}=-\frac{1}{2}\kappa A$$

弹力与时间的函数关系为

$$F=-\kappa A\ \sin\omega t$$

此过程中弹力对时间的平均值

$$\overline{F_t}=\frac{\int_0^{\frac{T}{4}}(-\kappa A\sin\omega t)\mathrm{d}t}{\frac{T}{4}-0}=-\frac{2}{\pi}\kappa A$$

点拨:功是力的空间累积,计算变力的功要用力对位移的平均值$\overline{F_x}$,即

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\mathrm{d}x=\overline{F_x}(x_2-x_1)$$

冲量是力的时间累积,计算变力的冲量要用力对时间的平均值$\overline{F_t}$,即

$$I=\int_{t_1}^{t_2}F(t)\mathrm{d}t=\overline{F_t}(t_2-t_1)$$

【例 4】在一次实验中,某同学用螺旋测微器测量某圆柱体的直径 D,在柱体的不同位置测量了 6 次,测量结果如表 1 所示.

表 1　直径 D 的测量值

实验次数	1	2	3	4	5	6
直径 D/cm	1.050 2	1.048 8	1.051 6	1.048 0	1.049 5	1.047 0

请计算直径的算术平均值及其标准差.

解析:测量结果的算术平均值

$$\overline{D}=\frac{1}{6}(1.050\,2+1.048\,8+1.051\,6+1.048\,0+1.049\,5+1.047\,0)=1.049\,18\text{ cm}$$

测量值的不确定度

$$\sigma_N=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}$$

算术平均值的标准差

$$\sigma_{\overline{N}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n(n-1)}}=0.000\,7\text{ cm}$$

所以,直径的测量结果可以表述为

$$D=\overline{D}+\sigma_{\overline{N}}=(1.049\,2\pm0.000\,7)\text{ cm}$$

点拨:在处理实验数据的过程中,测量结果不确定度的估算涉及方均根的运算.表述测量结果时,测量结果的有效数字与不确定度的最后一位对齐.

(上接第 23 页)

教师和学生而言,做好教学和学习后的及时反思是至关重要的,因此设计好微反思是微课教学中不可或缺的一部分.教师在平时的教学中要不断引导学生在学习过程中对自己的学习活动不断反思,及时发现不足、自我调整.

例如,在学习了“带电粒子在电场中的运动”一节后,由于本节内容属于较高要求,知识点多、相关公式较繁琐,想让学生完全进行单纯的识记是不可行的.教师应引导学生认识到本节是和前面所学的动力学、平抛运动、功能关系紧密联系的,可让学生课后进行反思:物体的自由落体运动与带电粒子的加速运动,平抛运动与带电粒子在电场中的偏转有什么相似之处?在求解速度和位移时,除了直接用运动学公式之外,能否从能量的视角去分析?这样就可以激励学生用微反思的方式进行记忆和巩固,将前后所学知识融会贯通,形成自己的知识网络.让学生带着这种任务进行学习反思,可以更好地激发学生的积极性,从而在反思的过程中实现学习目标,提高自主学习的效率,收获成功的喜悦.

5　结束语

在中职物理教学中,传统的教学模式、单一的教学方法很难达到预期的教学效果.微课凭借其形象直观的画面和丰富的视听效果,更适合中职学生的认知特点,能够激发学生的学习兴趣.可以说,微课在促进学生自主学习方面具有独特的优势.教师应充分利用微课资源,引导学生积极主动地参与到教与学的过程中,培养学生的自主学习能力,为学生的终身发展服务.

但我们也应该看到,在中职物理微课这一领域,虽然也有一些微课视频,但相对来讲比较零散,没有一个系统的资源库.因此中职物理微课教学的理论与实践研究还是一个有待开拓的领域,对每个中职物理教师而言任重而道远.

参 考 文 献

1　胡铁生,黄明燕,李民,等.我国微课发展的三个阶段及其展示.远程教育杂志,2013(4):36～42