

由线连接的两体运动问题*

曾贵平 方保龙

(合肥学院数学与物理系 安徽 合肥 230601)

(收稿日期:2018-10-23)

摘要:光滑的水平板开有光滑小孔,用细线穿过小孔将置于水平面上做匀速圆周运动的物体与下垂物体连接.当下垂物体挂上另一物体后,体系将如何运动,通过两种方法对此体系的运动问题进行了解答.可以确定,下垂物体挂上质量适当的物体后,下垂的物体随后将做上下振动,置于水平面上的物体将做非圆周转动.

关键词:圆周运动 角动量守恒 机械能守恒

1 引言

为加深学生对物理概念、定义、理论的理解与应用,大学物理教材都会设计或提炼出相关的练习题供学生训练.然而,在设计题时不能想当然,否则会出现难以发现的错误.下面这道题就是这种情况.

【例题】光滑的水平板中央开一小孔,质量为 m 的小球用细线系住,细线穿过光滑的小孔后挂一质量为 m_1 的物体.小球做匀速圆周运动,当半径为 r_0 时与 m_1 物体达到平衡.今在 m_1 的下方再挂一质量为 m_2 的物体,如图 1 所示.试问这时小球做匀速圆周运动的角速度 ω' 和半径 r' 为多少^[1]?

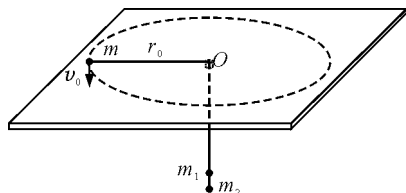


图 1 运动系统示意图

解析:在只挂重物 m_1 时,小球做圆周运动的向心力为 $m_1 g$,即

$$m_1 g = m r_0 \omega_0^2 \quad (1)$$

挂上 m_2 后,则有

$$(m_1 + m_2) g = m r' \omega'^2 \quad (2)$$

重力对圆心的力矩为零,故小球对圆心的角动量守恒.即

$$\begin{aligned} r_0 m v_0 &= r' m v' \\ r_0^2 \omega_0 &= r'^2 \omega' \end{aligned} \quad (3)$$

联立式(1)~(3)得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_1 g}{m r_0}} \quad (4)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{m_1 g}{m r_0}} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5)$$

$$r' = \frac{m_1 + m_2}{m \omega'^2} g = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{1}{3}} r_0$$

以上的解题过程似乎正确,然而题目是有问题的,问题在于题目中已经预先设想小球还能达到“匀速圆周运动”状态,实际运动并非如此.下面通过两种方法来处理问题.

2 动力学方程

如图 2 所示,建立柱坐标系,圆孔 O 为极点, z 轴正向垂直于平板向上.

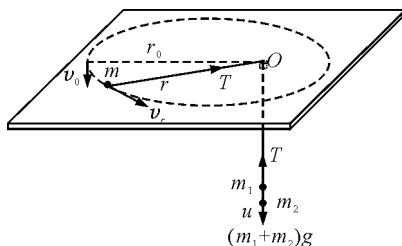


图 2 受力分析

设 t 时刻 m 的位矢为 $r e_r$,所受细线拉力为一 $T e_r$,将 m_1 与 m_2 看成整体,则其位矢为 $(r-l) e_z$,所受绳子的拉力为 $T e_z$, l 为细线长度.另设 t 时刻 m 的速度为 v , m_1 与 m_2 的速度为 u ,而 v 的径向分量等于 u ,因为 $v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d(r-l)}{dt} = u$.对于 m 的动力学

* 合肥学院教学研究项目,项目编号:2017jyzd002,2018hfjyxm55

方程为

$$ma_r = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -T \quad (6)$$

$$ma_\theta = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (7)$$

对 m_1 与 m_2 进行受力分析,其动力学方程为

$$T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a_z = (m_1 + m_2) \frac{d^2(r-l)}{dt^2} \quad (8)$$

式(7)反映 m 在横向不受力、径向受力,角动量守恒. 由式(7)得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2} \quad (9)$$

式中 k 为常量,可由 m 做圆周运动的初始条件确定,

$k = \omega_0 r_0^2 = r_0 v_0$, 又 $m_1 g = \frac{m v_0^2}{r_0}$. 由式(6)、(8)与(9)

得

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + m} \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2 + m} \quad (10)$$

对于该微分方程的解,一般令 $r' = u = \frac{dr}{dt}$, 则

$$r'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} = u \frac{du}{dr}, \text{ 则上式为}$$

$$u du = \left[\frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + m} \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2 + m} \right] dr \quad (11)$$

积分得

$$u^2 = -\frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + m} \frac{r_0^3}{r^2} - \frac{2(m_1 + m_2)gr}{m_1 + m_2 + m} + c \quad (12)$$

常数 c 可由初始时刻 $u = 0, r = r_0$ 确定

$$c = \frac{(3m_1 + 2m_2)gr_0}{m_1 + m_2 + m} \quad (13)$$

则 m 的径向速度或 m_1 与 m_2 的速度为

$$u = \pm \left[\frac{(3m_1 + 2m_2)gr_0}{m_1 + m_2 + m} - \frac{2(m_1 + m_2)gr}{m_1 + m_2 + m} - \frac{m_1 gr_0^3}{(m_1 + m_2 + m)r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

由此可见 m_1 与 m_2 的速度并非常量. 考虑极端情况 $m_1 \ll m_2$, 由式(10)可见 m_1 与 m_2 的加速度趋近于 g , 近似自由落体运动, 它们的速度由式(14) $v_r^2 = 2g(r_0 - r)$ 确定. 对于一般情况, 式(14)可以改写为

$$v_r = \pm \sqrt{\frac{ar^2 - br^3 - c}{r^2}} \quad (15)$$

式中

$$a = \frac{(3m_1 + 2m_2)gr_0}{m_1 + m_2 + m}$$

$$b = \frac{2(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2 + m}$$

$$c = \frac{m_1 gr_0^3}{m_1 + m_2 + m}$$

要确定 $v_r = 0$ 对应的 r , 可求解

$$f(r) = ar^2 - br^3 - c = 0$$

其两个真实根可由图3所示求出. 另外, v_r 的最大值对应的 r 处于 $r_1 \sim r_0$ 之间, 可由

$$\frac{d}{dr} \sqrt{\left(a - br - \frac{c}{r^2} \right)} = 0$$

得到

$$r = \left(\frac{2c}{b} \right)^{\frac{1}{3}}$$

由此可见, v_r 在零至最大值之间变化, 即挂上物体 m_2 后, 实际上 m_1 与 m_2 随后将做上下的振动, 而 m 将做绕圆孔 O 点的非圆周运动.

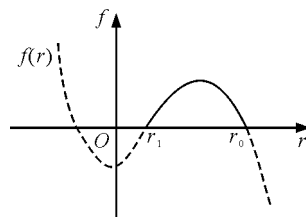


图3 $v_r = 0$ 时 r 的两个真实根

3 机械能守恒

以桌面为势能零点, 由于3个物体构成的系统机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - (m_1 + m_2)g(l - r_0) = \frac{1}{2} m v^2 -$$

$$(m_1 + m_2)g(l - r) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2)u^2 \quad (16)$$

在极坐标系中 m 的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$$

则

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

而 $u = \frac{dr}{dt}$, 加上式(9), 又 $m_1 g = \frac{m v_0^2}{r_0}$, 于是式(16)为

$$(m + m_1 + m_2) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 =$$

$$m_1 gr_0 + 2(m_1 + m_2)g(r_0 - r) - \frac{m_1 gr_0^3}{r^2}$$



初中电学“陷阱题”浅析

岳鹏程

(四川省南江县下两中学 四川 巴中 636648)

(收稿日期:2018-11-12)

摘要:近年各地中考试题出现电学“陷阱题”,学生基础知识掌握不牢或粗心大意,会误入这些“陷阱”,造成解题的失误.从设置各种题型、不同层次、不同深度的“陷阱题”,让学生经历陷入“陷阱”——冲出“陷阱”的过程,使学生“吃一堑长一智”,这样既掌握了摆脱“陷阱”的方法,又完善了认知结构,深化了认知过程.

关键词:电学“陷阱题” 认知结构 认知过程

近年各地中考试题经常会出现一些电学“陷阱题”,此类题目考查的知识难度虽不大,但由于题目提供的信息中往往暗藏“陷阱”以及学生基础知识掌握不牢或粗心大意,便会误入这些“陷阱”,造成解题的失误.因此,在平时的习题教学中有意识设置各种题型、不同层次、不同深度的“陷阱题”,让学生经历陷入“陷阱”——冲出“陷阱”的过程,使学生“吃

一堑长一智”,这样既掌握了摆脱“陷阱”的方法,又完善了认知结构,深化了认知过程.下面就初中电学中几种“陷阱题”作简要剖析.

1 利用定势思维设置“陷阱”

学生在解题时要深刻理解好每一个物理概念和物理规律.命题者往往故意利用定势思维精心设置

m_1 与 m_2 的速度或 m 的径向速度则为

$$u = \pm \left[\frac{(3m_1 + 2m_2)gr_0}{m_1 + m_2 + m} - \frac{2(m_1 + m_2)gr}{m + m_1 + m_2} - \frac{m_1 gr_0^3}{(m + m_1 + m_2)r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

结果与前相同.

4 结论

一个置于水平面上做匀速圆周运动的物体,通

过线连接着另一个下垂物体,在极端情况下,当下垂物体挂上大质量物体后,下垂的物体随后将做近似自由落体运动.一般情况,下挂物体的质量不是很大时,下垂的物体随后将做上下的振动,水平面上的物体将做绕圆孔的非圆周运动.

参考文献

- 1 赵近芳,王登龙.大学物理学(上)(第5版).北京:北京邮电大学出版社,2017.77

The Motion Problem of Two – body Connected with a Line

Zeng Guiping Fang Baolong

(Mathematics and Physics Department, Hefei University, Hefei, Anhui 230601)

Abstract: Two methods are used to solve the motion problem of two – body which an object is placed on a horizontal plane and another object connected with a line is sagged. It can be determined that the sagging object will vibrate up and down after hanging an appropriate object, and the object placed on the horizontal plane will rotate non – circularly around the circular hole.

Key words: circular motion; conservation of angular momentum; conservation of mechanical energy