



带电圆面场强公式适用范围的分析与探讨^{*}

王丽娜 赵兴宇

(伊犁师范学院物理科学与技术学院 新疆 伊宁 835000)

(收稿日期:2018-10-31)

摘要:针对带电圆面场强常见公式的适用问题及其与直观结果相矛盾的情况,构建了带电圆面模型,采用数值模拟计算的方法,得到了不同带电圆面体系产生的场强结果.分析了矛盾产生的原因,在一定的相对精度下,分别给出了带电圆面轴线上场强公式可以适用、电荷可认为均匀连续分布、带电圆面轴线上场强公式可简化为无限大带电平面场强公式和带电圆面可简化为圆心处等量点电荷结果的条件与范围.

关键词:带电圆面 电场强度 适用范围 微观非均匀

1 引言

带电平面的电场场强是电磁学中的一个重要问题,带电平面是理论和实际问题中的一个重要理想模型,也是处理平行板电容器、导体和介质表面附近电场的重要基础^[1~4],对均匀带电平面及其相关问题的研究仍在继续^[5~7].均匀圆形带电平面(带电圆面)在其轴线上产生的场强可通过积分求出,任意形状带电平面附近的场强可通过高斯定理求得^[3].当分别满足一定条件时,带电圆面可简化为无穷大带电平面或点电荷问题,但是究竟场点到圆面的距离比圆面尺寸小到多少时,才可以把带电平面在其轴线上产生的场强看成无限大均匀带电平面的结果,究竟大到多少时可以简化为圆心处等量点电荷.而且,当场点到均匀带电面的距离趋近于零时,面上的一些电荷到场点的距离将趋近于零,由点电荷的场强公式可知,该点的场强将会是无穷大;然而此时,无论是带电圆面在其轴线上的场强公式,还是无限大均匀带电平面的场强公式,都相同地给出了一个与距离无关的有限值,这与由点电荷的观点得出的结论是相矛盾的;造成这种矛盾的原因又是什么

呢?这一矛盾将直接影响面附近场强问题的处理.

为了增强对带电平面问题的理解,便于场强公式的选择运用,本文将采用数值计算的方法对上述问题进行研究,给出定量标准下公式的适用范围,分析产生矛盾的原因.

2 带电圆面模型的构建与理论

在微观上,电荷的分布是离散的、不连续的,所以建立模型时,在微观尺度上电荷是以离散形式进行分布的.假设有一个圆面位于 $z=0$ 的平面内,圆心位于坐标原点,如图1所示.

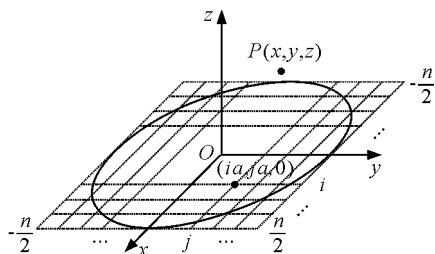


图1 带电圆面示意图

在圆面内有一系列的格点, x 轴和 y 轴方向格点间的距离均为 a ;沿 x 轴方向,平行于 y 轴有 n 行格点,沿 y 轴方向,平行于 x 轴也有 n 列格点,这里 n

^{*} 伊犁师范学院教育教学改革项目,项目编号:JGKC17155

作者简介:王丽娜(1983-),女,硕士,讲师,研究方向凝聚态物理与物理教学.

通讯作者:赵兴宇(1984-),男,硕士,讲师,研究方向凝聚态物理与物理教学.

为正整数. 为了使电荷分布关于 z 轴对称, 格点坐标应为 $(ia, ja, 0)$, 并且 n 为偶数时, i, j 为整数, n 为奇数时, i, j 为半整数, 具体取值为 $-\frac{n}{2}, -\left(\frac{n}{2}-1\right), -\left(\frac{n}{2}-2\right), \dots, \left(\frac{n}{2}-2\right), \left(\frac{n}{2}-1\right), \frac{n}{2}$. 当圆面的半径为 $R, n = \text{INT}\left(\frac{2R}{a}\right)$ 或 $\text{INT}\left(\frac{2R}{a} + 1\right)$, INT 表示取整; 满足 $(i^2 + j^2)a^2 \leq R^2$ 的格点 $(ia, ja, 0)$ 共同组成了格点圆面.

设圆面内每个格点上都有一个电荷量为 q 的点电荷, 并且在模拟计算时 q 的分布保持不变. 当 a 在晶格常数范围内取值时, 在宏观上, 可以认为该半径为 R 的格点圆面是一个均匀带电圆面, 电荷的面密度 σ 为 $\frac{q}{a^2}$, 轴线为 z 轴.

由点电荷场强公式可知, 格点 $(ia, ja, 0)$ 上的电荷在 $P(x, y, z)$ 点产生的场强为

$$\mathbf{E}_{ij}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \mathbf{e}_{r_{ij}} \quad (1)$$

式中 ϵ_0 为真空的介电常数, π 为圆周率, r_{ij} 为格点 $(ia, ja, 0)$ 到 P 点的距离, $\mathbf{e}_{r_{ij}}$ 为格点 $(ia, ja, 0)$ 指向 P 点的单位矢量. 依据几何关系可以得到

$$r_{ij} = \sqrt{(ia-x)^2 + (ja-y)^2 + z^2} \quad (2)$$

由场强的叠加原理可知, 场点 $P(x, y, z)$ 处的场强 $\mathbf{E}_S(x, y, z)$ 为

$$\mathbf{E}_S(x, y, z) = \sum_i \sum_j \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \mathbf{e}_{r_{ij}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{1}{(ia-x)^2 + (ja-y)^2 + z^2} \mathbf{e}_{r_{ij}} \quad (3)$$

在理论中, 当电荷均匀分布在圆面上时, 可以得到 $P(0, 0, z)$ 处的场强^[3], 这里用 $E_I(0, 0, z)$ 表示 $E(0, 0, z)$, 则有

$$E_I(0, 0, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{z}{R}\right)^2}}} \right] \quad (4)$$

在 $\frac{z}{R} \rightarrow 0$ 时, 式(4)可近似地表示为无限大均匀带电平面的场强公式, 此时用 $E_{\text{INF}}(0, 0, z)$ 表示 $E(0, 0, z)$, 则

$$E_{\text{INF}}(0, 0, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5)$$

在 $\frac{z}{R} \rightarrow \infty$ 时, 式(4)可近似地表示为圆心处等量点电荷场强 $E_P(0, 0, z)$ 的公式, $E_P(0, 0, z)$ 的表达式为

$$E_P(0, 0, z) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \quad (6)$$

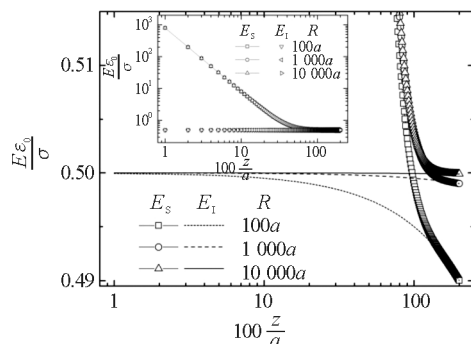
3 计算结果与分析

模拟计算中各物理量的单位均为 SI 单位, 体系的大小以 a 为参照进行选取, 模拟的体系包括 R 为 $100a, 1000a$ 和 $10000a$ 的 3 个体系, 模拟计算时长度和电荷量分别采用 a 和 q 进行了约化. 计算的场点 $P(x, y, z)$ 全部选在 $z \geq 0$ 的区域内, 则 z 就代表场点 $P(x, y, z)$ 到圆面的距离; 为了便于分析, 在绘图时, 将电场强度 E 约化为 $\frac{E\epsilon_0}{\sigma}$, 将长度 z 约化为 $\frac{z}{a}$ 或 $\frac{z}{R}$, x 约化为 $\frac{x}{R}$, 约化后所得物理量的单位都为 1.

3.1 带电圆面轴线上场强公式的适用范围

在考察 $z \rightarrow 0, P(0, 0, z)$ 处点电荷公式的直观结果与式(4)、(5)结果相矛盾情况时, 考虑到微观上电荷分布不连续, 分别模拟计算了 n 为奇数[轴线过格点 $(0, 0, 0)$] 和 n 为偶数[轴线过格点 $(-0.5a, -0.5a, 0)$ 和 $(0.5a, 0.5a, 0)$ 连线的中点] 的两种情况, 以便观察微观上电荷分布不连续所产生的影响.

图 2 所示的是模拟结果 E_S 和理论结果 E_I 随 z 的变化情况, (a) 和 (b) 分别是 n 为奇数和偶数的情况, 主图是局部放大的结果, 插图是全部结果.



(a) n 为奇数的情况

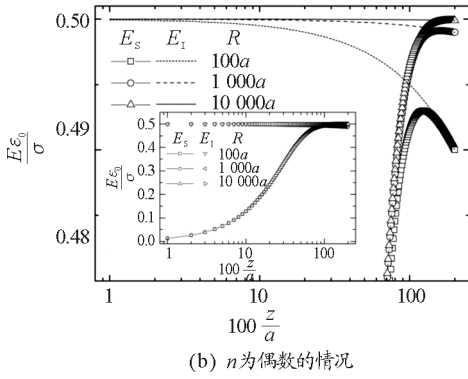


图2 模拟结果 E_s 和理论结果 E_l 随 z 的变化

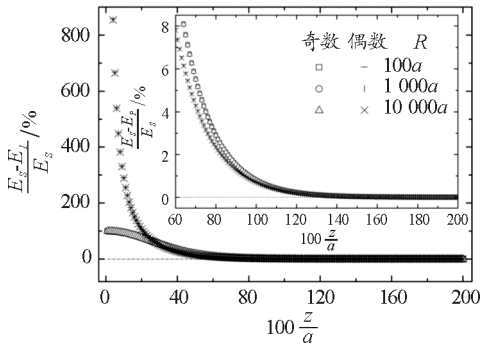


图3 相对偏差 $\frac{|E_s - E_l|}{E_s}$ 随 z 的变化

从图2中可以看出,在模拟的所有体系中,在 z 较小时, E_s 和 E_l 的差别都比较明显,但是随着 z 的增加, E_s 和 E_l 逐渐趋于一致.

为了定量地描述 E_s 和 E_l 二者之间的差别,引入相对偏差 $\frac{|E_s - E_l|}{E_s}$,如图3所示,插图是原点 O 附近的结果.从图3中可以看出,在 z 较小时,偏差较大,随着 z 的增加相对偏差在快速减小,并趋近于零,而且从 $z=a$ 附近开始,在图3中,随着 z 的增加,几乎看不出不同体系之间的相对偏差.当 $z = \frac{97a}{100}$ 时,在模拟计算的体系中这一相对偏差已经全部小于1%,也就是说 $z \geq a$ 时,利用式(4)计算所得结果的相对精度已经达到99%以上.

为了探究图2(a)中在 z 较小时,引起较大偏差的原因,这里将 n 为奇数时,格点 $(0,0,0)$ 的电荷在 $P(0,0,z)$ 点所产生的场强 E_o 进行单独计算,并与由式(3)计算所得的整个圆面所产生的场强进行对比,如图4所示.可以看出在 z 较小时, E_o 几乎与 E_l 一样,这说明此时其他电荷在 P 点所产生的场强要

远远小于 E_o ,也就是说格点 $(0,0,0)$ 处电荷的贡献超过其他电荷的总和, E_l 被格点 $(0,0,0)$ 处电荷的个体性所主导,而带电圆面的整体性被淹没了.

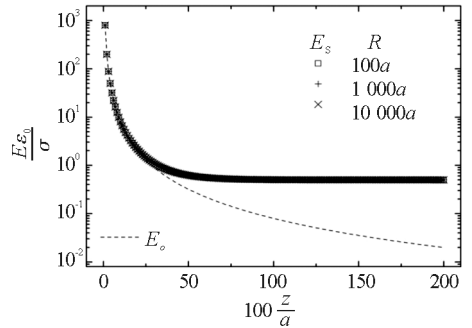


图4 E_s 和 E_o 随 z 的变化

在对 n 为奇数和偶数的模拟计算结果时,可以看出在 z 较小时,二者的差别较大,随着 z 的增加,二者的结果逐渐趋于一致,引入相对偏差 $\frac{2(E_s^e - E_s^o)}{E_s^e + E_s^o}$ 来定量地描述二者之间的差别,如图5所示,插图是原点 O 附近的结果.

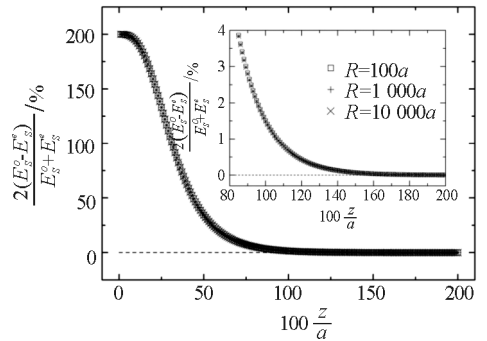


图5 相对偏差 $\frac{2(E_s^e - E_s^o)}{E_s^e + E_s^o}$ 随 z 的变化

随着 z 的增加,相对偏差 $\frac{2(E_s^e - E_s^o)}{E_s^e + E_s^o}$ 在快速减小,当 $z = \frac{107a}{100} \approx 1.1a$ 时,这一偏差已经小于1%.

n 为奇数和偶数,代表着电荷相对于圆面轴线的微观分布不同;可以看出在 z 较小时,电荷的微观分布对轴线上场强影响较大,随着 z 的增加,电荷的微观分布情况对轴线上场强的影响越来越小.结合图3和图5可以看出,随着 z 的增加,二者之间差别减小的过程正是电荷的微观分布情况对场强影响减小的过程.式(4)是在认为电荷在圆面上均匀连续分布的情况下,通过积分求得的,而式(3)是微观离散电荷产生场强的直接叠加结果, E_s 和 E_l 之间差别

趋近于零,意味着在此 z 值的尺度下,微观上离散分布的电荷可认为是连续均匀分布的.

所以, E_s 和 E_l 之间的差别是由微观尺度下电荷的离散分布和单个电荷对场强的贡献过大造成的. 通常情况下,所说的“均匀”带电,实际上指的是宏观均匀. 以 99% 相对精度为例,式(4)在 $z \geq a$ 的空间尺度内适用,在 $z \geq 1.1a$ 的尺度下可认为电荷是连续均匀分布的;当 $z = 2a$ 时, E_l 的精度高达 99.99%, z 在宏观尺度时,式(4)的结果可认为是精确的.

3.2 带电圆面轴线上场强可简化为无限大均匀带电平面场强的条件

在宏观尺度(包括 $z \geq 1.1a$ 的范围)下,当 $\frac{z}{R} \rightarrow 0$ 时, E_l 的表达式可以简化为 E_{INF} 的表达式,但是在简化时必然会产生偏差,这里将二者之间的相对偏差表示为 $\frac{E_{INF} - E_l}{E_l}$,由式(4)和式(5)可得

$$\frac{E_{INF} - E_l}{E_l} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{z}{R}\right)^2}} - 1} \quad (7)$$

图 6 所示的是 E_{INF} 与 E_l 的相对偏差随 $\frac{z}{R}$ 的变化情况,可以看出随着 $\frac{z}{R}$ 的增加,相对偏差逐渐增大. 当 $\frac{E_{INF} - E_l}{E_l} = 1\%$ 时, $z \approx 0.01R = 1\%R$. 也就是说,当轴线上场点到圆面的距离小于圆半径的 1% 时,利用无限大均匀带电平面的场强公式所得的结果与真实结果之间的偏差将小于 1%,相对精度达到 99% 以上.

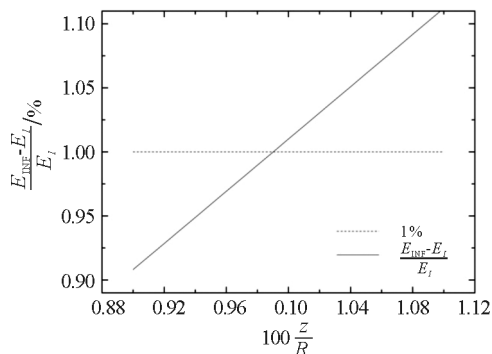


图 6 相对偏差 $\frac{E_{INF} - E_l}{E_l}$ 随 $\frac{z}{R}$ 的变化

3.3 带电圆面可以简化为圆心处等量点电荷的条件

在 $\frac{z}{R} \rightarrow \infty$ 时, E_l 的表达式可以简化为 E_p 的表达式,由式(4)和(6)可得二者的相对偏差 $\frac{E_p - E_l}{E_l}$ 为

$$\frac{E_p - E_l}{E_l} = \frac{1}{2 \left(\frac{z}{R}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{z}{R}\right)^2}}}\right]} - 1 \quad (8)$$

E_p 与 E_l 的相对偏差 $\frac{E_p - E_l}{E_l}$ 随 $\frac{z}{R}$ 的变化情况如图 7 所示,可以看出随着 $\frac{z}{R}$ 的增加,相对偏差逐渐减小. 当 $\frac{E_p - E_l}{E_l} = 1\%$ 时, $z \approx 8.6R$.

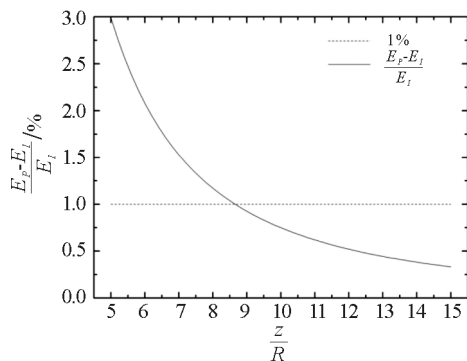


图 7 相对偏差 $\frac{E_p - E_l}{E_l}$ 随 $\frac{z}{R}$ 的变化

图 8 是利用式(3)计算的 $P(x, 0, 0)$ 处场强 E_s 与将带电圆面看成是全部电荷集中在圆心处等量点电荷在 $P(x, 0, 0)$ 处产生的场强 E_p 之间的相对偏差 $\frac{E_s - E_p}{E_s}$ 随 x 的变化情况,这里 x 代表着场点到圆心的距离. 随着 x 的增加,相对偏差在逐渐减小,当 $x \approx 6.2R$ 时,相对偏差已经小于 1%,偏差值几乎不随体系的大小改变.

通过对以上两个方向的分析可看出,为了方便,这里可取场点到圆面圆心的距离大于 $10R$ 时,将带电圆面产生的电场看成是圆心处等量点电荷,其场强的相对精度可达到 99% 以上.

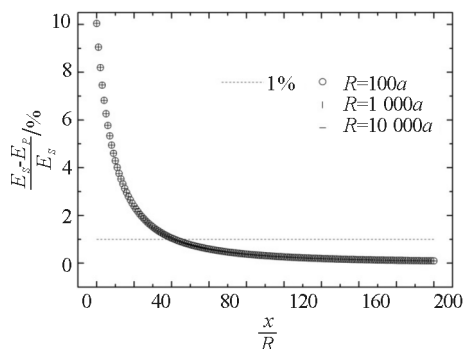


图8 相对偏差 $\frac{E_s - E_p}{E_s}$ 随 x 的变化

4 结论

通过计算分析表明,当场点到圆面的距离在电荷间距的尺度下时,带电圆面轴线上场强公式的相对偏差较大,但随着距离的增加快速减小,逐渐与精确值一致,偏差是由微观尺度下电荷的离散分布和单个电荷对场强的贡献过大造成的.以99%的相对精度为例,场点到圆面的距离大于电荷间距时,带电圆面轴线上场强公式可以适用;场点到圆面的距离大于1.1倍的电荷间距时,可以认为电荷是均匀连续分布的;场点到圆面的距离大于1.1倍的电荷间

距且小于圆面半径的1%时,带电圆面轴线上场强公式可以简化为无限大带电平面的场强公式;场点到圆心的距离大于圆面半径的10倍时,带电圆面可简化为圆心处等量点电荷的结果.本文计算场强的方法和思路,可以推广运用到带电圆面在任意点所产生场强的计算.

参考文献

- 1 张自嘉,潘琦,陈海秀,等.带电平面的反射与透射研究——菲涅耳公式的修正.光学学报,2016,36(06):285~291
- 2 王蕾,梁好均.聚电解质混合物在均匀带电平面上吸附的密度泛函研究.化学学报,2011,69(23):2773~2780
- 3 梁灿彬,秦光戎,梁竹健.电磁学(第3版).北京:高等教育出版社,2012.13~20
- 4 赵凯华,陈熙谋.电磁学.北京:高等教育出版社,2003.28~29
- 5 周海英,陈浩,张晓炜.均匀带电薄圆盘的电场.大学物理,2005,24(11):31~34
- 6 郑民伟.非平行板电容器电场和电容的进一步计算.大学物理,2010,29(12):10~11,24
- 7 赵林明,刘影,刘博,等.非平行板电容器电容计算的修正.大学物理,2014,33(07):17~19,41

Analysis and Discussion on Applicable Ranges of Formulas of Electric Field Intensity from Charged Circular Plane

Wang Lina Zhao Xingyu

(College of Physical Science and Technology, Yili Normal University, Yining, Xinjiang 835000)

Abstract: A model of charged circular plane is created to study applicable ranges of some common formulas of electric field intensity from charged circular plane, the results of which are inconsistent with intuitionistic ones. Electric field intensities of some charged circular plane systems are calculated by computer simulation. Then the contradiction is analyzed and conditions, which is about electric field intensity formula on axis of circular plane being applied, charges being regarded as continuous and homogeneous distribution, electric field intensity formula on axis of charged circular plane being reduced to one of infinite charged plane and charged circular plane being reduced to equivalent charges on the centre of itself, are gained under a certain relative precision.

Key words: charged circular plane; electric field intensity; applicable range; microscopic heterogeneity