竞赛与
物理专题研修

余弦曲线轨道背景下小球运动加速度的变化

魏学锐

（佛山市南海区石门中学　广东 佛山　528200）

（收稿日期：2018－11－04）

摘　要：分析加速度时，曲线运动不仅有切向加速度，还有法向加速度. 从一道表述有误的题出发，构建了余弦曲线模型，理论分析了小球运动加速度变化情况，为一线教学讲解曲线运动加速度时提供了一定的参考.

关键词：加速度　曲线运动　余弦曲线

笔者在教学中，遇到一道值得深入思考的题. 原题如下：

【题目】 如图 1 所示，甲乙两光滑的小球原来在水平面以相等速度向右运动，现甲向右运动要通过一段坡路 ABC，乙要经过一个坑 DEF，若经 ABC 和 DEF 的路程相等，两球通过 C 或 F 到达右端水平面的速度相等，则（　　）

A. 甲由 A 到 C 的时间比乙由 D 到 F 的短

B. 甲由 A 到 C 的时间比乙由 D 到 F 的长

C. 甲由 A 到 C 的过程中加速度先减小再增大

D. 乙由 D 到 F 的过程中加速度先增大再减小

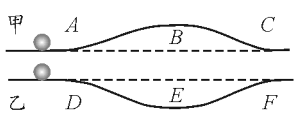


图 1　题图

针对选项 C，D，因为涉及到曲线运动，并且未告知曲线的方程，解答起来是相当困难的. 下面我们详细对选项 D 进行分析，选项 C 用类似方法可以分析得出.

1　构建模型

由于曲线未知，我们根据形状，构建一个 DEF 轨道的轨迹方程为：$y = A\cos\omega x$，建立坐标系如图 2 所示.

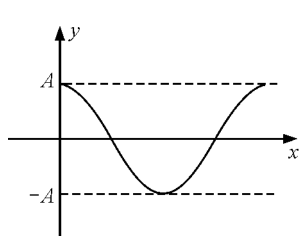


图 2　曲线 $y = A\cos\omega x$

有一质点以初速度 v_0 从 $x = 0$ 处出发. 此时我们要解决两个问题：

（1）该质点会不会脱离轨道运动？

（2）在不脱离轨道运动的情况下，加速度的变化是怎样的？

2　解决问题

2.1　讨论该质点会不会脱离轨道运动

假设在 P 点，该质点脱离轨道，则在 P 点只受重力作用. 加速度分析如图 3 所示.

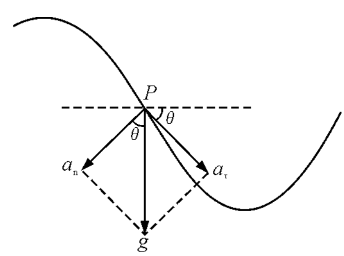


图 3　P 点加速度分析

易得　$\tan\theta = |y'| = A\omega\sin\omega x$

由三角函数关系可得

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2\omega^2\sin^2\omega x}}$$

易得 P 点曲率半径为

$$\rho = \frac{(1 + A^2\omega^2\sin^2\omega x)^{\frac{3}{2}}}{A^2\omega^2\cos^2\omega x}$$

从起点到 P 点，由动能定理有

$$mgA(1 - \cos\omega x) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

在 P 点，由牛顿第二定律有

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\rho}$$

联立方程并整理得

$$gA^2\omega^2\cos^2\omega x-(v_0^2A\omega^2+2gA\omega^2)\cos\omega x+(g+gA^2\omega^2)=0$$

整理后得

$$\Delta=b^2-4ac=A^2\omega^2(v_0^4\omega^2+4gA\omega^2v_0^2-4g^2)$$

若要让 $\cos\omega x$ 有解，则需满足

$$\omega^2>\frac{4g^2}{v_0^2(v_0^2+4gA)}$$

满足上式条件时，脱离位置由下解确定

$$\cos\omega x=\frac{v_0^2A\omega^2+2gA\omega^2\pm\sqrt{\Delta}}{2gA^2\omega^2}$$

其中 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$（脱离轨道只有可能出现在此范围），有兴趣的读者可以对这个解做下详尽的分析.

特别地，当 $v_0=0$，$\omega=1$ 时，$\Delta=-4g^2A^2<0$，此时 $\cos\omega x$ 无解，则此时不会脱离轨道运动.

2.2　质点不脱离轨道运动情况讨论

如图 4 所示，一般曲线运动在自然坐标下的加速度由切向和法向两部分组成，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$$

考虑切向加速度，可以列出方程

$$mg\sin\theta=ma_\tau$$

其中

$$\sin\theta=\frac{A\omega\sin\omega x}{\sqrt{1+A^2\omega^2\sin^2\omega x}}$$

故易得

$$a_\tau=\frac{A\omega\sin\omega x}{\sqrt{1+A^2\omega^2\sin^2\omega x}}g$$

考虑法向加速度，有

$$ma_n=m\frac{v^2}{\rho}$$

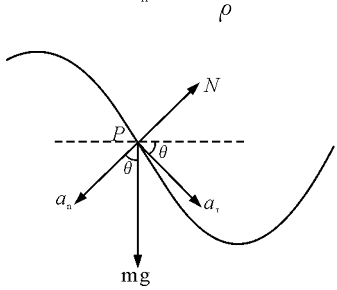


图 4　P 点受力及加速度图示

由 2.1 讨论，代入相关公式有

$$a_n=\frac{2gA^2\omega^2\cos\omega x(1-\cos\omega x)+v_0^2A\omega^2\cos\omega x}{(1+A^2\omega^2\sin^2\omega x)^{\frac{3}{2}}}$$

故该质点不脱离轨道运动情况下加速度大小为

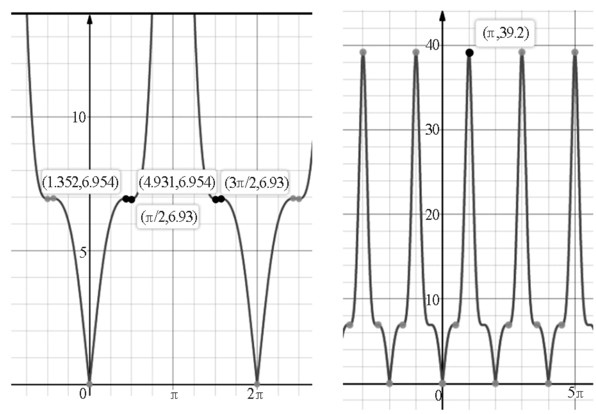
$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$$

即

$$a=\left\{\frac{[2gA^2\omega^2\cos\omega x(1-\cos\omega x)+v_0^2A\omega^2\cos\omega x]^2}{(1+A^2\omega^2\sin^2\omega x)^3}+\frac{A^2\omega^2\sin^2\omega x}{1+A^2\omega^2\sin^2\omega x}g^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

使用软件作出 $a-x$ 图，容易发现，a 与 ω 和 A 关系很大. 下面举两种情况看一下加速度变化的图像.

(1) $A=1$，$\omega=1$，$v_0=0$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 此时由图 5 可知，在 $x\in(0,\pi)$ 内，加速度先增加，后减小；在 $x\in(\pi,2\pi)$ 内，加速度先减小，后增加，再减小. 最大值出现在 $x=\pi$ 处.



(a) a-x细节图　　(b) a-x整体图

图 5　情况(1) $a-x$ 图像

(2) $A=1$，$\omega=0.5$，$v_0=0.1\ \mathrm{m/s}$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 此时我们发现，在 $x\in(0,2\pi)$ 内，加速度大小是单调递增的，如图 6 所示.

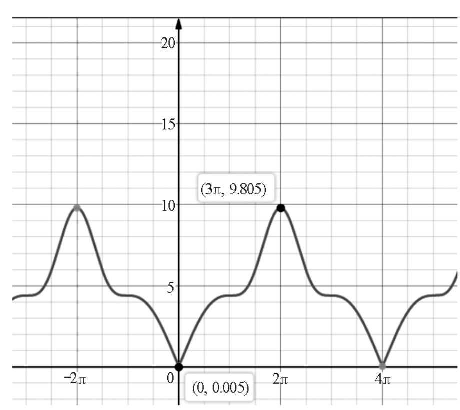


图 6　情况(2) $a-x$ 图像

至此，我们发现加速度的变化在所建模型中是捉摸不定的，是会随着 ω 和 A 的变化而不同的. 在给定特定参数的情况下，才能确定加速度的变化，自然也就证明了本文开始时提出的题目是有问题的.

参 考 文 献

1　漆安慎，杜婵英. 普通物理学教程：力学（第 3 版）. 北京：高等教育出版社，2012.12