

巧用对勾函数解决物理问题

梁鸿辉

(福建省龙岩第一中学 福建 龙岩 364000)

(收稿日期:2018-11-15)

摘要:对勾函数的极值和单调性在数学上应用广泛,我们把它应用到物理中来不但可以解决很多有趣的问题,同时也能够提升运用数学知识解决物理问题的能力.就对勾函数在物理中的应用从力学、光学、电磁学等不同的维度进行了讨论和分析,完满地解决了相关问题,并为其他类似的工作提供了一定的思路.

关键词:对勾函数 均值不等式 单调性

对勾函数是高中数学的一种典型函数,其形式为

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (a > 0, b > 0)$$

其图像如图1所示,该函数的极值点为 $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$,考

虑第一象限情形,在 $x \in (0, \sqrt{\frac{b}{a}})$ 范围内为单调递

减函数,在 $x \in (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$ 范围内为单调递增函数.

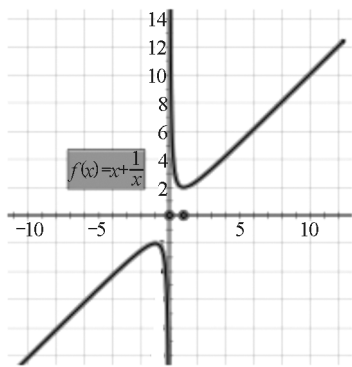


图1 对勾函数图像

高中阶段大家所熟知的均值不等式,其取等时的值正是与对勾函数的极值相对应,关于均值不等式在物理中的应用已经非常多了,如文献[1]就对此作了详细的分析,但是这些仅仅是利用均值不等式取等时的值,当物理量的变化导致无法取等时,学生对物理量的判断往往束手无策,本文正是研究此类型问题.

1 巧用对勾函数比速度

【例1】如图2所示,斜面体固定不动,一轻质弹簧沿光滑斜面放置,下端固定在斜面底部挡板上.分两次将质量为 m_1 和 m_2 ($m_2 > m_1$) 的两物块从斜面上不同位置静止释放,两次运动中弹簧的最大压缩量相同(弹簧始终在弹性限度范围内).物块从开始释放到速度第一次减为零的过程,则()

- A. m_1 开始释放的高度高
- B. m_1 的重力势能变化量大
- C. m_2 的最大速度小
- D. m_2 的最大加速度小

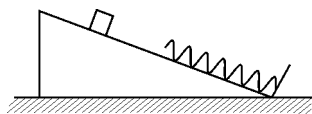


图2 例1题图

答案: A, C, D.

本题的选项 C 无法直接判断,用常规方法也不容易得出物块质量与最大速度的关系.但是通过能量关系列式,采用对勾函数的相关性质可以做出准确的判断.

解析:设弹簧的最大压缩量为 A ,平衡位置时压缩量为 x_0 ,最大速度为 v_m ,则平衡位置

$$mg \sin \theta = \kappa x_0 \quad (1)$$

系统能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + mg(A - x_0)\sin\theta = \frac{1}{2}\kappa(A^2 - x_0^2) \quad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$v_m^2 = \frac{mg^2 \sin^2\theta}{\kappa} + \frac{\kappa A^2}{m} - 2gA \sin\theta \quad (3)$$

式(3)即为对勾函数形式,由对勾函数的极值

公式可知 v_m^2 的极小值在 $m_0 = \frac{\kappa A}{g \sin\theta}$ 处,由式(1)知

$m = \frac{\kappa x_0}{g \sin\theta} < m_0$,则该过程处于曲线的左侧,如图3

所示为减函数,因为 $m_2 > m_1$,所以 m_2 的最大速度小,因此选项C正确。

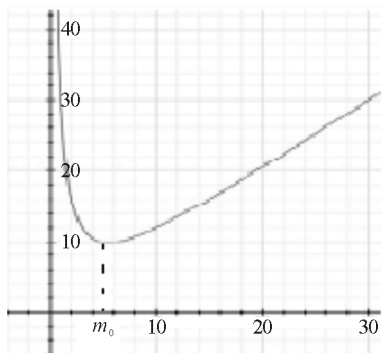


图3 $v_m^2 - m$ 关系图像

2 巧用对勾函数比时间

【例2】一束红光和一束紫光以相同的人射角射

入一块平行玻璃板,已知玻璃的折射率大于 $\sqrt{2}$,则这两束光通过平行玻璃板所用的时间相比较()

- A. 紫光用的时间较长
- B. 红光用的时间较长
- C. 两者所用的时间相等
- D. 无法比较

答案:A.

解析:光路图如图4所示,折射率公式

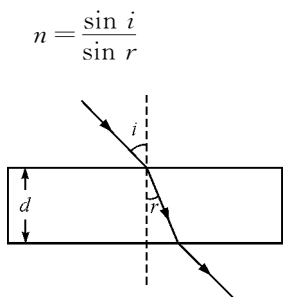


图4 光束通过平行玻璃板光路图

速度公式

$$v = \frac{c}{n} \quad (5)$$

则光在玻璃板内传播的时间

$$t = \frac{d}{v \cos r} = \frac{n^2 d}{c \sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (6)$$

式(6)并不能直接判断出 t 和 n 之间的变化关系,但是市面上大部分练习答案都直接给出 n 较大则 t 也更大,这显然是没有对式(6)进一步讨论的结果。

实际上可令

$$m = \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \quad (7)$$

则有

$$n^2 = m^2 + \sin^2 i \quad (8)$$

将式(8)代回式(6)并整理得

$$t = \frac{dm}{c} + \frac{d \sin^2 i}{mc} \quad (9)$$

该式即为对勾函数形式,易得 $m = \sin i$ 时 t 有极大值,将 m 代回式(7)得 $n = \sqrt{2} \sin i$,那么 t 在 $n \in (\sqrt{2} \sin i, +\infty)$ 为增函数,题中已说明玻璃的折射率大于 $\sqrt{2}$,可知紫光通过平行玻璃板的时间较长。

3 巧用对勾函数比功率

【例3】如图5所示, ad 和 bc 为相距 $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m 的

平行导轨(电阻很小,可以不计), a, b 间接有一固定电阻,阻值为 R ,长直细杆 MN 可以按任意角 θ 架在平行导轨上,并以匀速 v 滑动(平移), v 的方向与 da 平行.杆 MN 有电阻,每米长的电阻值为 R ,整个空间充满磁感应强度为 B 的匀强磁场,方向如图.试判断 θ 从 $0 \sim 90^\circ$ 变化时 MN 上消耗的电功率如何变化。

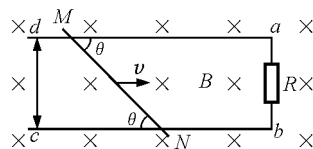


图5 例3题图

解析:杆 MN 上电动势

$$\epsilon = Blv \quad (10)$$

杆 MN 接入电路电阻

关注圆周运动盲区 深入浅出解惑答疑

许旭旭

(中山市第一中学 广东 中山 528403)

(收稿日期:2019-01-11)

摘要:基于现实教学中,有关高中物理圆周运动课题研究的匮乏,试图从圆周运动的“非‘完全杯壁下流’”、重力功率极值、有界磁场中的弧长,这3个维度出发,深入探索圆周运动的重点和难点问题,使学生在触及此类问题时,能够举一反三,触类旁通.

关键词:圆周运动 杯壁下流 重力功率极值 弧长

高中物理中很多知识点都是定性考查学生的理解能力,其中有一部分知识是学生经常遇到而难以从数学角度定量推导出来.笔者从教多年,将圆周运动相关知识点归纳总结,争取对学生深入理解这类题型起到积极的作用,本文摘取3个知识点评述如下,以期抛砖引玉,与同仁共同交流探讨,并对广大高中理科生起到科学理解的作用.

1 非“完全杯壁下流”现象

【例1】如图1所示,半径为 R 的光滑半球形水杯固定在水平地面上,顶部有一质量为 m 的小物块.今给小物块一个极小的水平初速度 v_0 (即 $v_0 \approx 0$),不计空气阻力,则物块将()

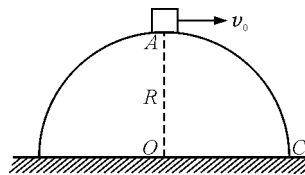


图1 例1题图

解析:由于初速度 $v_0 \approx 0$,若是没有半球形水杯,则小物块近似做自由落体运动,即近似沿着AO运动,由于水杯的存在,小物块就会被水杯支撑住,

以上3例分别从力学、光学、电磁学等不同角度用对勾函数进行了分析,从中可看出对勾函数的单调性在物理分析中具有广泛而重要的作用,物理的很多应用也都可写成对勾函数的形式,这里不一一赘述.另外,对勾函数的应用也有助于出题者把握题目的科学性,比如例2中的折射率以 $\sqrt{2}$ 为临界,题目若不强调,则可能会出现无法判断哪个时间更长的情形.

参考文献

- 1 杨绍林,彭朝阳.均值不等式在物理解题中的应用.物理通报,2015,34(11):60~63

$$r = \frac{lR}{\sin \theta} \quad (11)$$

由欧姆定律得

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \quad (12)$$

联立式(10)、(11)、(12)得

$$P_{MN} = I^2 r = \frac{B^2 l^3 v^2}{R \left(\sin \theta + \frac{l^2}{\sin \theta} + 2l \right)} \quad (13)$$

式(13)即为对勾函数的倒数形式,当 $\sin \theta = l$

时, MN 上消耗功率有极大值 $P_{\max} = \frac{B^2 l^2 v^2}{4R}$,结合题意可知,当 θ 从 $0 \sim 90^\circ$ 变化时, MN 上消耗的电功率先增大后减小.