



# 基于 Mathematica 的驻波 可视化交互式动态模拟

魏丽梅

(山东省日照实验高级中学 山东 日照 276826)

(收稿日期:2018-11-28)

**摘要:**基于科研用数学软件 Mathematica 的可视化与交互式技术,将抽象的波的叠加与驻波形成的物理图景进行了交互式的动态展示,展示过程生动直观,适用于课堂演示,可以提高教学效率和效果,增强学生学习的积极性。

**关键词:** Mathematica 驻波 交互式

## 1 引言

Mathematica 是一款以函数驱动的数学计算软件,具有数值处理、符号操作、图形绘制、动画制作等多项功能,将其应用于计算机辅助教学中,可以用交互式的图像、动画以及声音对一些抽象的物理模型进行直观形象的模拟与展示,近些年来广泛地应用于从高中到研究生的教学或科研工作中<sup>[1-4]</sup>。

如何在课堂上生动形象地向学生描述波的叠加与驻波的形成,是一个难题.本文利用 Mathematica 软件的动画绘制功能,对简谐波的叠加与驻波的形成进行了演示,绘制参数的可调节性使动画具备交互式的功能,该演示操作命令程序简单,形象直观,有助于激发学生学习的积极性。

## 2 驻波的模拟演示

振动方向在同一平面、相向传播的两列简谐波的数学描述形式如下

$$u_1(x, t) = A \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \delta\right)$$

$$u_2(x, t) = \cos\left(\omega_2 t + \frac{2\pi x}{\lambda_2}\right)$$

这里假设振动  $u_2$  的振幅为单位振幅 1,坐标原点处  $t=0$  时刻的初位相为零,振动  $u_1$  相对振动  $u_2$  的振幅比为  $A$ ,坐标原点处  $t=0$  时刻的初位相为  $\delta$ . 第一列简谐波沿  $x$  轴正方向传播,第二列简谐波沿  $x$  轴负方向传播,两列波的叠加振动为

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = A \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \delta\right) + \cos\left(\omega_2 t + \frac{2\pi x}{\lambda_2}\right)$$

我们先分析合振动在某一时刻,如时间  $t=1$  时的振动情况:

$$u(x, t=1) = A \cos\left(\omega_1 - \frac{2\pi x}{\lambda_1} + \delta\right) + \cos\left(\omega_2 + \frac{2\pi x}{\lambda_2}\right)$$

在 Mathematica 中可以利用 Plot(绘图)命令绘制函数的曲线,其命令编辑形式为:

Plot[ $\{f_1, f_2, \dots\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ]

该命令绘制函数  $f_1, f_2, \dots$  在自变量  $x$  处于最小值  $x_{\min}$  至最大值  $x_{\max}$  区间的函数曲线.因为在波的叠加振动函数中,除自变量  $x$  外,还有  $A, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2, \delta$  多个参量,参量数值的大小均需要可交互式的调节,我们采用 Manipulate(参数操纵)命令实现函数中参量数值大小的交互式调节操作.此处需要用到的 Manipulate 命令,编辑形式为:

Manipulate[ $\text{expr}, \{v, v_{\min}, v_{\max}\}$ ]

该命令给出带有参量  $v$  大小控制条的 expr(描述内容)所描述的内容,参量  $v$  的可调节区间为最小值  $v_{\min}$  至最大值  $v_{\max}$ .将绘图命令 Plot[ $\{f_1, f_2, \dots\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ] 作为 expr 所描述的内容,则可以形成带参量  $v$  大小控制条的函数  $f_1, f_2, \dots$  曲线绘制命令.将  $A, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2, \delta$  作为可调参量,绘制参量可调的两简谐波分振动与合振动曲线,命令编辑如下:

Manipulate[

Plot[{A \* cos[ $\omega_1 - \frac{2\pi}{\lambda_1} * x + \delta$ ], cos[ $\omega_2 +$

$\frac{2\pi}{\lambda_2} * x$ ],

A \* cos[ $\omega_1 - \frac{2\pi}{\lambda_1} * x + \delta$ ] + cos[ $\omega_2 + \frac{2\pi}{\lambda_2} * x$ ],

{x, 0, 8}],

{A, 1, 2}, { $\omega_1$ , 1, 10}, { $\omega_2$ , 1, 10}, { $\lambda_1$ , 1, 16},

{ $\lambda_2$ , 1, 16}, { $\delta$ , 0, 2 $\pi$ }]

其中  $x$  坐标轴上设置区间为  $0 \sim 8$ , 可操作参量的设定为: 振幅比  $A$  设置为  $1 \sim 2$  之间可调, 圆频率  $\omega$  均设置为  $1 \sim 10$  之间可调, 波长  $\lambda$  均设置为  $1 \sim 16$  之间可调, 初位相差  $\delta$  设置为  $0 \sim 2\pi$  之间可调. 在该命令中, 可调参量数目、数值范围均可按照自己的实际需要设置. 运行该命令, 得到图 1 所示 3 条振动曲线, 分别为两分振动与合振动在  $t = 1$  时刻的振动曲线.

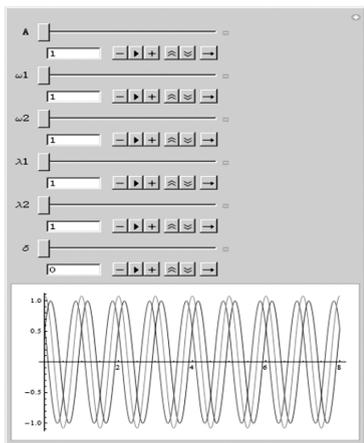


图 1 两简谐分振动及其合振动的静态曲线

通过图中的可调参量控制条中的加减号, 可以调节对应参量数值的大小, 也可以直接在参量当前数值显示区域直接输入数值. 点击三角形的播放按钮, 可以使参量数值自动匀速增加或减小, 变化速率可通过向上或向下的双箭头符号调节, 最右侧的水平箭头控制参量的变化方向是增加还是减小.

图 1 中我们得到的是在坐标轴上一段区间  $x \in [0 \sim 8]$ 、时间轴上静止 ( $t = 1$  时刻)、带参量调节控制条的振动曲线, 要得到随时间动态变化的振动曲线还需要利用 Mathematica 的 Animate(动画) 命令. 此处需要用到 Animate 命令, 其编辑形式为:

Animate[expr, {v, v<sub>min</sub>, v<sub>max</sub>}]

该命令给出 expr 所描述的内容随参量  $v$  从最小值  $v_{\min}$  至最大值  $v_{\max}$  连续变化的动画. 将时间  $t$  作为

上述 Animate 动画命令中的动画参量  $v$ , 前面所述的 Manipulate 命令内容作为 expr 描述内容, 可以得到随时间变化的振动曲线动画. 命令编辑如下:

Animate[

Manipulate[

Plot[{A \* cos[ $\omega_1 * t - \frac{2\pi}{\lambda_1} * x + \delta$ ],

cos[ $\omega_2 * t + \frac{2\pi}{\lambda_2} * x$ ]

A \* cos[ $\omega_1 * t - \frac{2\pi}{\lambda_1} * x + \delta$ ] + cos[ $\omega_2 * t + \frac{2\pi}{\lambda_2} * x$ ], {x, 0, 8}],

{A, 1, 2}, { $\omega_1$ , 1, 10}, { $\omega_2$ , 1, 10}, { $\lambda_1$ , 1, 16}, { $\lambda_2$ , 1, 16}, { $\delta$ , 0, 2 $\pi$ }],

{t, 0, 15}]

在 Mathematica 中编辑和运行所述命令后, 得到两简谐波叠加前后的波动动画, 图 2 为该动画中的一幅截图, 其中可调参量的数值设置如图中所示. 图 2 中最上面时间  $t$  运动轴的播放按钮可以控制动画在暂停与运动间切换.

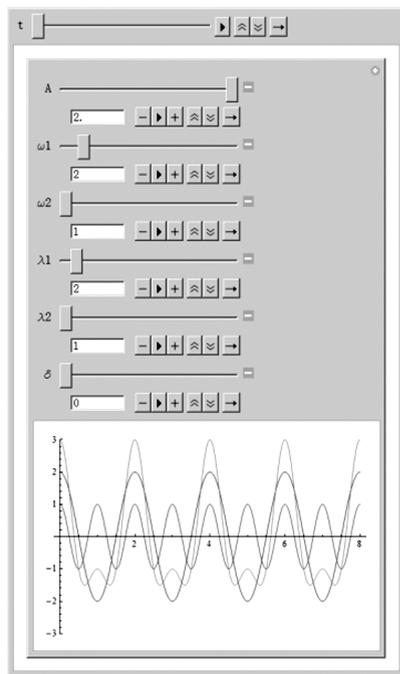


图 2 两简谐分振动及其合振动动画截图

在 Mathematica 的运行结果图 2 中, 通过调整两简谐分振动的振幅比、圆频率、波长、初位相差, 可以直观地得到各个参数的改变对于分振动及合成振动情况的影响. 将两分振动的圆频率、波长、振幅均设为一致, 我们就得到了驻波合振动, 图 3 为驻波振

动画中的一幅截图,可以直观地验证驻波形成条件中关于振幅比为1,波长与频率相同的描述.

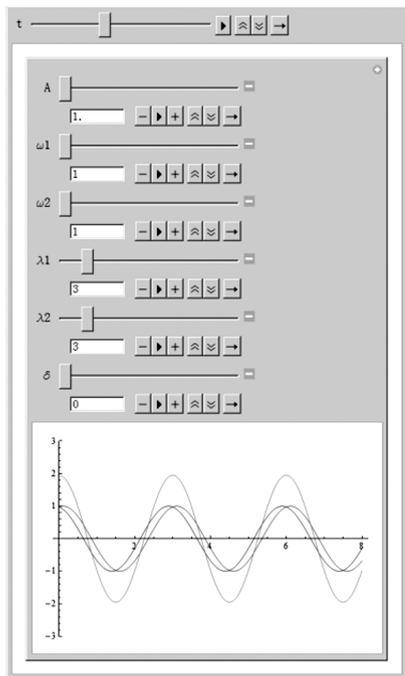


图3 两简谐分振动及其合成驻波振动动画截图

进一步的,如图4中所示,调节坐标原点处的初位相差 $\delta$ 为 $\pi$ ,我们就得到左端为波节的驻波动画.为了进一步实现两端均为波节的弦上的驻波振动,我们需要调节波长,这个过程可以直观地演示驻波在弦上的形成,并得到弦长为半波长整数倍的数值关系,图5显示了弦长为半波长的情况.

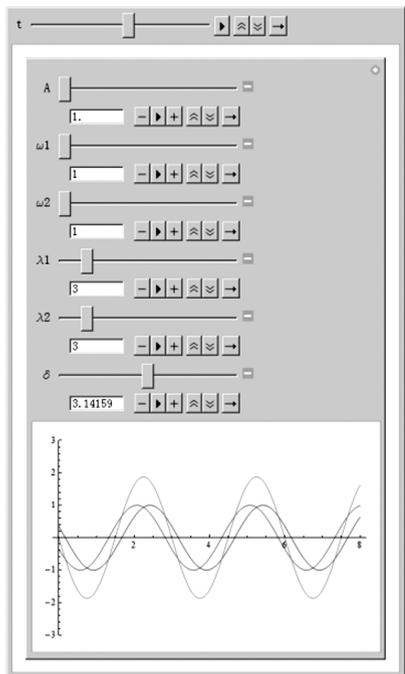


图4 两简谐分振动及其合成的左端点为波节的驻波振动动画截图

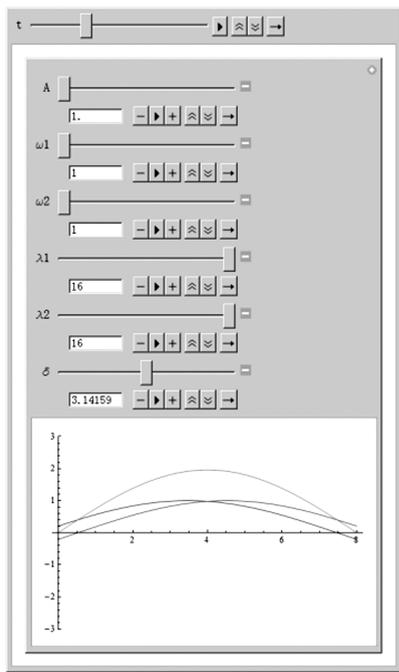


图5 弦长为半波长的驻波振动动画截图

至此我们通过组合 Mathematica 中的 Plot 绘图、Manipulate 参数操纵、Animate 动画命令,实现了多个参数的交互式操纵和动画,形象、直观地展示了驻波振动以及弦上驻波的形成,相对于传统的沙漏简谐振动演示、弓弦驻波演示,具有准确、易用、效率高和演示内容更全面的特点,适合于课堂教学演示.

### 3 总结

本文介绍了数学软件 Mathematica 的 Plot, Manipulate, Animate 命令,用它们的组合命令将简谐振动及其合振动进行了直观的静态、动态演示,通过交互式的参数操纵,对驻波以及弦上驻波形成和振动的物理图景进行了展示.演示过程操作简洁、效率高,适用于课堂教学,有助于加深学生对物理图景的理解,激发学习兴趣,培养学生使用计算机软件解决抽象、复杂问题的能力.

### 参考文献

- 1 唐曙光. 在物理教学中使用 Mathematica. 物理通报, 2003(10):25 ~ 26
- 2 陈星. 论 Mathematica 在高中物理教学中的应用原则. 物理通报, 2017(6):98 ~ 101
- 3 陈显盈, 尤爱惠. 用 Mathematica 演示波的衍射、干涉现象. 物理通报, 2010(11):95
- 4 郑永凡, 王艳青. 基于 Mathematica 的交互式动态可视化设计及其应用. 辽宁大学学报, 2010(37):324 ~ 328

(下转第 119 页)

摆线的方程为

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

其中  $a$  为圆的半径,  $t$  是圆的半径所经过的弧度(滚动角).

#### 4 结论

由以上讨论可知, 小球在重力和竖直平面内的洛伦兹力共同作用下的运动轨迹为摆线. 如果把重

力换成电场力, 可以用同样的方法讨论, 得出带电粒子在电场力和洛伦兹力共同作用下的轨迹方程.

#### 参考文献

- 1 同济大学数学教研室. 高等数学(第2版). 北京: 高等教育出版社, 1982
- 2 余守宪, 唐莹. 浅析物理学中的旋轮线(摆线). 大学物理, 2001, 20(4): 5~10
- 3 余守宪, 唐莹. 重力场和正交均匀电场中的旋轮线(摆线). 物理与工程, 2001, 11(6): 12~18

## A Brief Analysis on the Motion of Charged Particles under the Action of Gravity and Lorentz Force

—A Second Thought on a College Entrance Examination Question

Jia Yanfeng

(The Second Middle School of JingXing County, Shijiazhuang, Hebei 050301)

Jia Yahui

(College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou, Henan 450002)

**Abstract:** The motion of charged particles under the combined action of gravity and Lorentzian forces is complicated. With the help of mathematical method, by solving the second order, nonhomogeneous linear differential equation with constant coefficients, we get the equation of the trajectory. Finally, the particle trajectory is worked out.

**Key words:** charged particles; gravity; Lorentz forces; differential equation; cycloid

(上接第 113 页)

## Visual Interactive Dynamic Simulation of Standing Wave Based on Mathematica

Wei Limei

(Rizhao Experimental High School of Shandong, Rizhao, Shandong 276826)

**Abstract:** Based on the visualization and interactive technology of mathematical software Mathematica for scientific research, physical scenes of wave superposition and standing wave formation were displayed dynamically and interactively. The display process is vivid and intuitive. It is suitable for presentation in the classroom. It can improve the teaching efficiency and effectiveness, and enhance the enthusiasm of students in learning.

**Key words:** Mathematica; standing wave; interactive