大学物理教学

均匀带电半球面轴线上的电势和电场强度

林建福

（金秀瑶族自治县民族高中　广西 来宾　545799）

（收稿日期：2019-02-01）

摘　要：先利用积分法求出均匀带电半球面轴线上的电势表达式，然后利用电场强度与电势的关系导出均匀带电半球面轴线上的电场强度.

关键词：半球面　轴线　电势　电场强度

先用积分法求出均匀带电半球面轴线上的电势表达式，然后利用电场强度与电势的关系求出轴线上电场强度的表达式，并用所得表达式求出球心处的电势和电场强度.

1　均匀带电半球面轴线上的电势

设有一半经为 R 的均匀带电半球面，电荷面密度为 σ，现求出其轴线上的电势表达式. 如图 1 所示，在轴线上任取一点 p，则 p 点的电势可以表示为如下积分

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma \mathrm{d}S}{r} \tag{1}$$

积分遍及整个半球面.

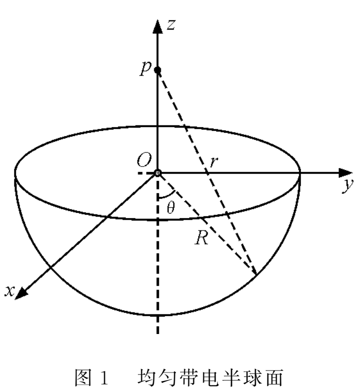

图 1　均匀带电半球面

采用球坐标形式，式(1) 化为

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta}}$$

即

$$V = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 + 2Rz\cos\theta}}$$

所以

$$V = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{(R+z)^2}\right] \quad (z \neq 0) \tag{2}$$

由于 $z = 0$ 是式(2) 的一个奇异点，对于球心处($z = 0$) 的电势将于下文给出.

当 $z \geqslant -R$ 且 $z \neq 0$ 时

$$V = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - (R+z)\right] \tag{3}$$

当 $z < -R$ 时

$$V = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2 + R^2} + (R+z)\right] \tag{4}$$

上述式(3)、(4) 即为均匀带电半球面轴线上除去球心处($z = 0$) 任意一点的电势表达式.

2　均匀带电半球面轴线上的电场强度

由于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 等于电势梯度的负值[1]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

设均匀带电半球面轴线上电场强度为 E，则

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

当 $z > -R$ 时，由式(3) 有

$$V = -\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2 + R^2} - (R+z)\right] \quad (z \neq 0)$$

所以

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R-\sqrt{z^2+R^2}\right)+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\quad(z\neq 0)\tag{5}$$

当 $z<-R$ 时，由式(4) 有

$$V=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2+R^2}+(R+z)\right]$$

所以

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R+\sqrt{z^2+R^2}\right)+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\tag{6}$$

上述式(5)、(6) 即为均匀带电半球面轴线上除去球心处($z=0$) 的电场强度的表达式.

由于电场强度的法向分量在带电面两侧存在突变[2]，对于 $z=-R$ 处即半球面所在处的电场强度并不能直接由上述式(5)、(6) 给出，下面我们单独求出 $z=-R$ 处的电场强度. 设从 $z=-R$ 所在处上下两边趋于该点时，电场强度的极限分别为$\boldsymbol{E}_+$ 和$\boldsymbol{E}_-$，则 $z=-R$ 处的电场强度为[3]

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_-+\boldsymbol{E}_+)$$

由式(5)、(6) 可分别求出

$$E_+=\lim_{z\to -R_+}\left[\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R-\sqrt{z^2+R^2}\right)+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sqrt{2}\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$$E_-=\lim_{z\to -R_-}\left[-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R+\sqrt{z^2+R^2}\right)+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sqrt{2}\sigma}{4\varepsilon_0}$$

因此 $z=-R$ 处的电场强度为

$$E=\frac{1}{2}(E_-+E_+)=-\frac{\sqrt{2}\sigma}{4\varepsilon_0}\tag{7}$$

3 均匀带电半球面球心处的电势与电场

由于 $z=0$ 是式(2)、(3)、(5) 的奇异点，故不能直接应用这些式子求出 $z=0$ 处的电势和电场强度，现直接应用积分法求出 $z=0$ 处的电势和电场强度.

球心处的电势

$$V_O=\iint\frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R}=\iint\frac{\sigma R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

球心处的电场强度

$$E_O=\iint\frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\iint\frac{\sigma R^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

作为对比，我们再根据式(3)、(5)，采用取极限的方法求解 $z=0$ 处的电势和电场强度.

球心处的电势

$$V_O=\lim_{z\to 0}V=-\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[\sqrt{z^2+R^2}-(R+z)\right]=-\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R\left(\sqrt{z^2+R^2}-R\right)}{2\varepsilon_0 z}+\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\sqrt{z^2+R^2}}+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

球心处的电场强度

$$E_O=\lim_{z\to 0}E=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R-\sqrt{z^2+R^2}\right)+\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z^2}\left(R-\sqrt{z^2+R^2}\right)+\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\sqrt{z^2+R^2}}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

可见，两种方法求出的球心处的电势和电场强度是一致的. 球心处的电势和电场强度分别为

$$V_O=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

和

$$E_O=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

参 考 文 献

1 赵凯华. 新概念物理教程电磁学(第 2 版). 北京：高等教育出版社，2006. 39 ～ 40

2 梁灿彬. 电磁学(第 2 版). 北京：高等教育出版社，2004. 23 ～ 24

3 张之翔. 电磁学教学参考. 北京：北京大学出版社，2015. 29 ～ 30