

用“运动的合成与分解”分析复杂运动

徐富清

(扬州市邗江区公道中学 江苏 扬州 225119)

(收稿日期:2019-02-28)

摘要:使用“MATLAB”软件将月球绕太阳的运动、小齿轮绕大齿轮的运动及汽车的轮缘运动几个复杂运动以可视化方式表现出来,揭示这些运动背后隐藏的特点.

关键词:分解与叠加 函数方程 参数 动态运动轨迹 可视化

不久前,讲授“万有引力”一章时学生提出一个问题:月球绕太阳运动的轨迹为什么是一个摆线?为什么不是圆形或其他图形?怎样分析月球的运动?带着这个疑问笔者上网查询了一些资料,发现有很多典型的运动,如果使用“运动的合成与分解”的思想分析,它们的运动过程、运动轨迹就很好理解,并且可以回避复杂的数学运算,而且随着参数的变化,结果也不尽相同.由于要揭示复杂运动背后的规律,笔者将借助 MATLAB 这款软件,将复杂运动以图形、可视化方式表现出来,本文主要对下面3个典型的案例进行分析.

1 月球绕太阳的运动

(1) 简化运动模型

以太阳为中心建立 x, y 轴,太阳处于圆心 O ,地球绕太阳运动的半径为 R ,其运动轨迹称为本轮,月球环绕地球运动的半径为 r ,月球绕地球运动的轨迹称为均轮,如图1所示.

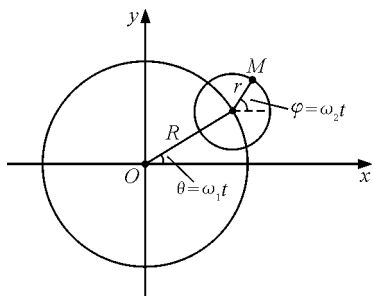


图1 简化的运动模型

(2) 建立函数

假设地球绕太阳运动的角速度是 ω_1 ,月球围绕

地球运动的角速度为 ω_2 ,则地球绕太阳运动的圆周运动方程为

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega_1 t) \\ y = R\sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

月球绕地球运动的圆周运动方程为

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega_2 t) \\ y = r\sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

根据运动的合成与分解,可将两个分运动 x 方向、 y 方向分别相叠加,就得到月球绕太阳运动的圆周运动方程

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega_1 t) + r\cos(\omega_2 t) \\ y = R\sin(\omega_1 t) + r\sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

(3) 使用 MATLAB 描绘运动轨迹

为了突出反映该模型背后的变化规律,我们取

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{15}$$

同时改变 R 和 r 的值,下面使用 MATLAB 工具描绘出运动轨迹.

1) 若 $R=20, r=3$,结果如图2所示,月球运动轨迹显示的是一个闭合的摆线.

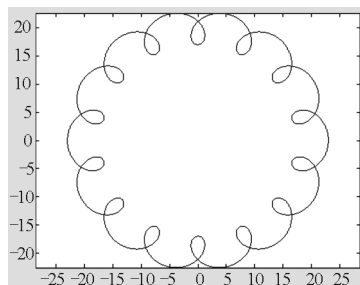


图2 $R=20, r=3$ 时,月球的运动轨迹

2) 若 $R=20, r=11$, 其运动轨迹如图3所示, 随着月球轨道半径 r 的增加, 摆线渐渐地发生重叠, 且中心部分形成一个多边形。

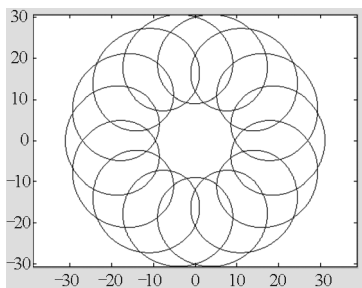


图3 $R=20, r=11$ 时, 月球的运动轨迹

3) 若 $R=20, r=20$, 即月球绕地球运动的半径与地球绕太阳运动的半径相等(不考虑太阳对月球的影响), 月球的运动轨迹如图4所示, 此时月球要经过太阳点, 中心部分形成一个花瓣状。

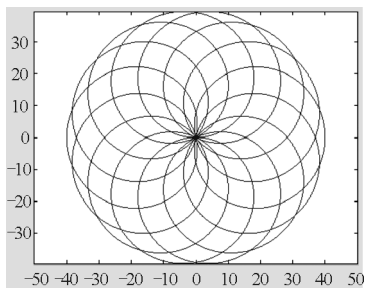


图4 $R=20, r=20$ 时, 月球的运动轨迹

4) 若 $R=20, r=30$, 即月球绕地球运动的半径超过地球绕太阳运动的半径, 月球运动轨迹如图5所示, 其中心部分趋近于一个圆形。

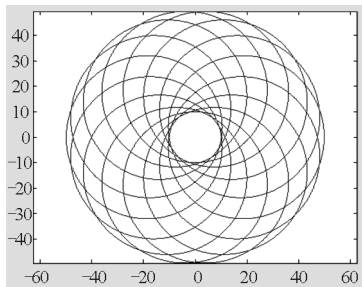


图5 $R=20, r=30$ 时, 月球的运动轨迹

2 小齿轮围绕大齿轮的运动

(1) 建立模型

假设大齿轮静止不动, 半径为 R , 小齿轮绕大齿轮作无滑滚动, 半径为 r , 如图6所示。

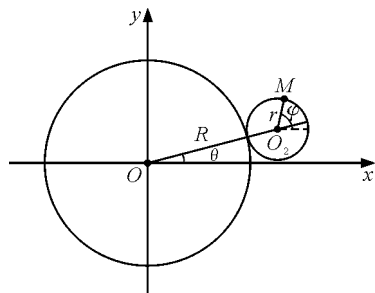


图6 小齿轮围绕大齿轮运动的简化模型

(2) 建立函数

假设起始时圆心 O 、接触点、 M 点共线, 当小齿轮在大齿轮上滚过角 θ 时, 小齿轮上的 M 点转过角 φ , 则小齿轮的圆心 O_2 围绕大齿轮 O 的圆周运动方程为

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta \\ y = (R+r)\sin\theta \end{cases}$$

M 点围绕小齿轮 O_2 的圆周运动方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

同理根据运动的合成与分解, 将两个分运动分别在 x, y 轴相叠加后, M 点围绕大齿轮 O 的圆周运动方程为

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta + r\cos\varphi \\ y = (R+r)\sin\theta + r\sin\varphi \end{cases}$$

由于小齿轮作无滑滚动, 因此有 $R\theta = r(\varphi - \theta)$, 即 $\varphi = \frac{R+r}{r}\theta$, 代入得到 M 点围绕大齿轮 O 的最终圆周运动方程是

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \\ y = (R+r)\sin\theta + r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

(3) 使用 MATLAB 描绘运动轨迹

下面给出了 $\frac{R}{r}$ 比值不同时 MATLAB 工具描绘出的 M 点运动轨迹。

1) 如果 $\frac{R}{r} > 1$, 如图7所示是 $\frac{R}{r} = \frac{10}{1}$, 显示的是一个闭合花边; 而如图8所示是 $\frac{R}{r} = \frac{10}{6}$, 之所以图形比较复杂, 是因为 $\frac{R}{r}$ 的比值是一个无理数, 需经过若干圈才能回到起点。

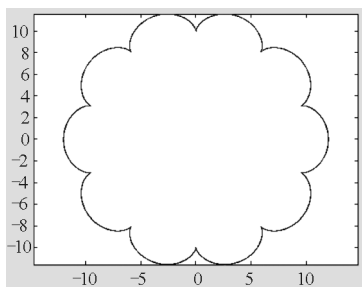


图7 $\frac{R}{r} = \frac{10}{1}$, M点的运动轨迹

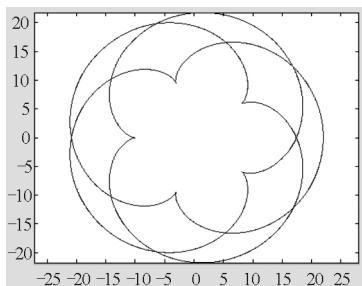


图8 $\frac{R}{r} = \frac{10}{6}$, M点的运动轨迹

2) 如果 $\frac{R}{r} < 1$, 即环绕的小齿轮半径超过了大

齿轮的半径. 如图9所示是 $\frac{R}{r} = \frac{10}{15}$; 如图10所示是

$\frac{R}{r} = \frac{10}{32}$, 此时表现出的图形令人惊奇.

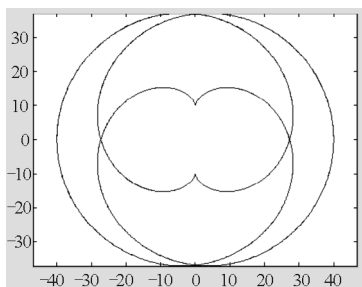


图9 $\frac{R}{r} = \frac{10}{15}$, M点的运动轨迹

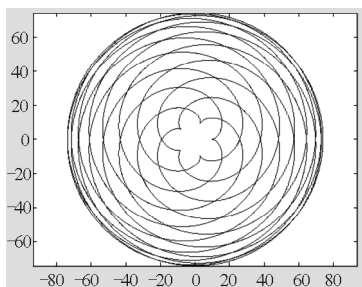


图10 $\frac{R}{r} = \frac{10}{32}$, M点的运动轨迹

3 汽车的轮缘运动

(1) 建立模型

设汽车车轮半径是 r , 汽车匀速直线运动的速度是 v , 车轮匀速转动的角速度是 ω , 且车轮作无滑滚动, 满足方程 $v = r\omega$, 如图11所示.

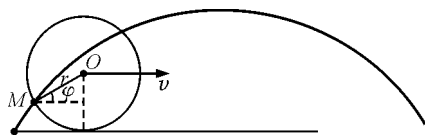


图11 汽车轮缘运动的简化模型

(2) 建立函数

轮缘 M 点的运动可以看作是两个分运动的叠加, 一是随圆心 O 在水平方向上的匀速直线运动, 即 $x = vt$, 二是 M 点围绕圆心的匀速圆周运动

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

同理根据运动的合成与分解, 将两个分运动叠加后, 得到 M 点的运动方程

$$\begin{cases} x = vt - r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \end{cases}$$

(3) 使用 MATLAB 描绘运动轨迹

假设 $v = 24 \text{ m/s}$, $\omega = 30 \text{ rad/s}$ 时, 车轮的临界半径为

$$r_0 = \frac{v}{\omega} = 0.8 \text{ m}$$

使用 MATLAB 工具作出运动轨迹.

1) 当车轮的半径 $r = 0.8 \text{ m}$, 则 M 点的运动轨迹如图12所示, 其形是一个直线花边.

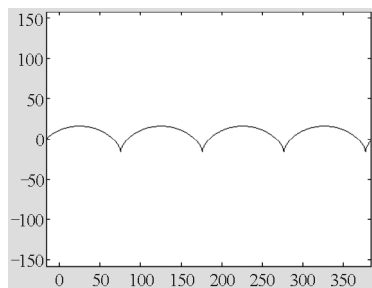


图12 $r = 0.8 \text{ m}$ 时, M点的运动轨迹

2) 若取车轮内的点 P 作为研究对象, 即 $r < 0.8 \text{ m}$ (如图13所示), 则 P 点的运动轨迹如图14所



重力加速度随纬度变化的精确值

廖蕴莹 谢元栋

(华南师范大学物理与电信工程学院 广东 广州 511400)

(收稿日期:2019-03-18)

摘要:把地球当作一个标准椭球体,来讨论重力加速度随纬度的变化,得出了准确的修正关系式,并把解析结果绘制成图像,从而加深对重力加速度的理解.

关键词:地球椭球体 重力加速度 纬度变化

一般情况下,物理学中处理有关力学问题时,取重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$,更粗略的计算甚至取 $g = 10.0 \text{ m/s}^2$. 这种处理方法使求解问题简单方便,精确度也能达到要求.但实际上,尽管重力加速度随纬度和高度变化不大,但还是有明显的变化.也就是说,地球表面的重力加速度并不是处处都相等,误差来源于两个方面:一是地球自转产生惯性离心力;二是地球不是严格的球体.前一种情况,教科书中有详细讨论^[1,2],后一种情况则很少涉及.本文拟弥补这

个缺陷.

众所周知,地球不是一个严格的球体,两极半径小,赤道半径大.这使重力加速度 g 随纬度的升高而增大的效应更显著.由于这个原因,各地实测的 g 也要比把地球当成一个球体算出的值大.下面详细讨论重力加速度与纬度变化的函数关系.

如图1所示,可把地球看成是一个长半轴为 $a = 6\,379\,250 \text{ m}$,短半轴为 $b = 6\,356\,755 \text{ m}$ 的旋转椭球体,围绕 y 轴做自转运动.地球不是一个严格的惯性

系,其形似一个波浪.

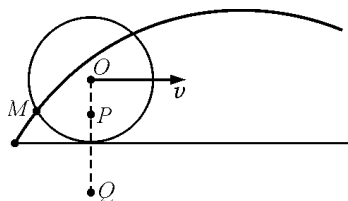


图13 取 P 点为研究对象

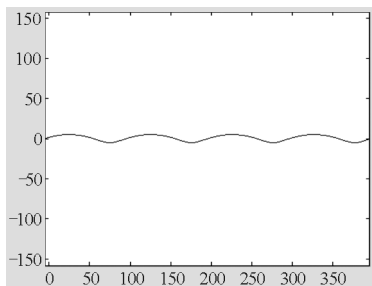


图14 $r < 0.8 \text{ m}$ 时, P 点的运动轨迹

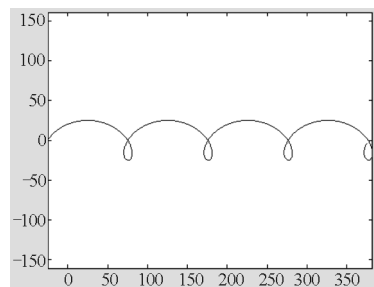


图15 $r > 0.8 \text{ m}$ 时, Q 点的运动轨迹

3)若取车轮外的点 Q 作为研究对象,即 $r > 0.8 \text{ m}$ (如图13所示),则 Q 点的运动轨迹如图15所示,结果呈现为摆线形状.

4 结束语

当笔者将所发现的结果向学生一一展示,学生学习的好奇心高涨,这不仅仅是结论也包括探究的过程.这就给我们一个启发,那就是对于一个看似简单的事物如果进行细致的研究和分析,往往会带来意想不到的惊喜.物理教学的目的是培养学生的科学素养、激发他们的想象,知道物理课程不是单调枯燥的,其关键是教师以何种方式激发学生的兴趣,并把这种力量带到学习中去.