Mathematica 在大学物理教学中的应用举例*

赵文丽　高　峰　王永刚　曹学成
（山东农业大学信息科学与工程学院　山东 泰安　271018）

（收稿日期:2018－12－15）

摘　要:用 Mathematica 的数值计算功能讨论了力学中单摆的小角问题以及电学中均匀带电细圆环的场强和电势分布,将相关结论定量、直观地显示出来,显著提高了教学效果.

关键词:Mathematica　单摆　均匀带电细圆环

1　引言

大学物理是理工农林学科学生必修的一门基础课,每年都会有大批的大学一二年级的学生学习这门课程.作为一门公共基础课程,大学物理有其自身的特点:一方面,大学物理问题的解决涉及到许多高等数学方面的计算,求解过程复杂,有些情况没有解析结果,也往往不能得到直观的物理图像,这是不利于教学过程的;另一方面,基础物理课内容多,学时少,每节课授课内容量都很大,很多知识点不能深入讲解.近年来更是面临着学时一再被压缩的窘境,这就导致学生从课堂中获取的知识量大为减少.因此,物理教师必须寻找一些新的教学方法,以期在有限的课堂时间里向学生传递更多的信息.美国 Wolfram 公司生产的一款数学软件 Mathematica 在设计的过程中考虑了在物理学方面应用的方便性[1],很适合研究物理问题,它强大的计算功能和图像功能可以用于辅助物理教学与研究.比如董键主编的一部教材讨论了 Mathematica 在力学、光学、电磁学等方面的应用[2].柳宏德用 Mathematica 获得了任意摆角下的单摆周期近似公式[3].杨能彪应用 Mathematica 进行物理理论计算和物理现象可视化的研究[4],获得了一些有意义的结论.本文则试图通过 Mathematica 设计力学、电磁学中一些问题的解决方案,探索 Mathematica 在大学物理教学中的应用.

2　单摆的小角问题

单摆模型是力学中很重要的物理模型,普通物理教材中提到[5],在小角度摆幅下,单摆的运动近似为简谐振动,其周期、振幅等物理量有精确的解析解,并且周期与振动振幅无关.那么究竟这个“小角度”需要小到什么程度呢?现在可以利用教学软件 Mathematic 来探索这一问题.

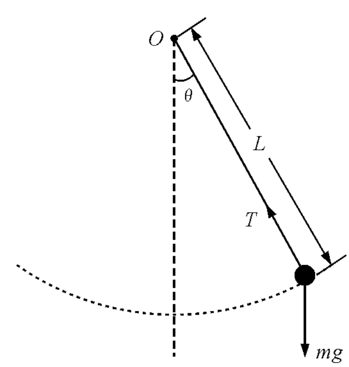


图 1　单摆模型

设系统所在的地球为惯性参考系,摆线不计质量且不可伸缩(如图 1),单摆的摆长为 1.5 m,重力加速度取 9.8 m/s^2.采用自然坐标系,摆线在竖直方向时摆角取零,摆球在右侧摆角取正,切向正方向为摆角增大的方向,考虑摆线带动下摆球在竖直平面内的运动,显然小球没有沿着摆线所在的法线方向运动,而在其垂直的切线方向,切向力为

$$G_\tau = -mg\sin\theta$$

切向加速度可以表示为

* 中华农业科教基金教材资助项目“普通物理学数字化教材建设的研究与实践”,项目编号:NKJ20150325

作者简介:赵文丽(1978－　),女,讲师,主要从事大学物理教学及研究.

$$a_\tau = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

则根据牛顿第二定律有摆球的运动方程

$$ma_\tau = -mg\sin\theta \tag{1}$$

两边消去小球质量可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{2}$$

在小角近似下，$\sin\theta \approx \theta$，该方程有解析解，可以得出周期公式

$$t_c = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3}$$

如果摆角为任意的角度，单摆的周期也不再有解析解，那么小角近似的周期公式便不再适用了. 要求解微分方程(2)，用 Mathematica 的“NDSolve”命令即可，因为它就是专门求解微分方程的数值解的工具. 从数值解容易得出不同初始条件下的振幅和周期. 如输入初始位置 $\theta=0$，初速度 $v=0.3$ m/s，可得，角振幅和周期的数值解分别为 0.067 767° 和 2.839 27 s. 输入不同的初始条件，就可以得出对应的角振幅和周期. 为此，可以求出在摆动角振幅从 0～90° 范围内对应的周期的数值解，同时，为了能够精确找到周期满足公式(3) 的小角近似的定量条件，可以对数值解进行 $n(n=4,5,6,7)$ 次多项式拟合，取若干不同的角振幅对应周期的数值解和拟合解相比较如表 1 所示. 从表 1 中所取的 6 种情况可以看出，$n=4,5$ 时，某些角振幅下拟合值与数值计算解不能完全吻合，而 $n=6,7$ 时，二者则完全吻合，因此，拟合多项式的次数取 6 已足够. 拟合公式为式(4).

表 1　不同角振幅对应周期的数值解和拟合解

角振幅 /(°)		1.494 43	5.980 27	13.480 6	30.237 5	59.413 2
数值计算周期 /s		2.458 28	2.459 85	2.466 71	2.501 66	2.634 33
拟合周期 /s	$n=4$	2.458 29	2.459 84	2.466 70	2.501 66	2.634 34
	$n=5$	2.458 28	2.459 85	2.466 70	2.501 66	2.634 33
	$n=6$	2.458 28	2.459 85	2.466 71	2.501 66	2.634 33
	$n=7$	2.458 28	2.459 85	2.466 71	2.501 66	2.634 33

$$T = 2.458\,18 - 2.814\,99\times 10^{-6}\theta + 4.717\,02\times 10^{-5}\theta^2 - 2.044\,44\times 10^{-8}\theta^3 + 1.365\,28\times 10^{-9}\theta^4 - 7.230\,52\times 10^{-12}\theta^5 + 5.550\,18\times 10^{-14}\theta^6 \tag{4}$$

图 2 是周期随着角振幅变化的关系图，圆点是数值解，曲线是拟合公式所得，从图中可以看出数值计算点与拟合曲线符合得非常好，要计算任意角振幅对应的周期，可以用该拟合公式.

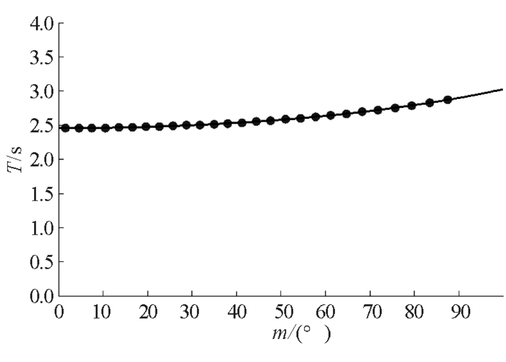


图 2　单摆周期随角振幅的变化

另外，图 2 还表明周期是随着角振幅的增大而增大的，尽管变化是很缓慢的. 那么究竟角振幅要小到多少之内，周期就不会变化了？基于这样的疑问，可以用拟合公式计算相同初始条件下的周期，再与数值计算的结果相比对，表 2 列出了若干角振幅在 0.1° 到 1.2° 对应的周期，结果发现，角振幅小于 0.5° 时，周期便不再变化，该体系做简谐振动.

所以，从计算所得到的 6 位有效数字来看，0.5° 以下才算是小角度. 这样，关于单摆“小角度”的说法获得了定量的表示. 但是，有的物理教材认为这个角度可以是 15° 甚至可以超过 20°[6,7]，这是因为，基础物理实验室用来测单摆周期所用的秒表，精度为 0.01 s，计算发现如果取这样的精度，角振幅在 10° 以内周期完全相同，即使角振幅达到 20°，误差也不会超过 0.1%.

表 2　0.1° ～ 1.2° 之间不同角振幅对应的周期

角振幅 /(°)	0.149 439	0.298 878	0.448 317	0.597 758
数值计算周期 /s	2.458 18	2.458 18	2.458 18	2.458 19
拟合周期 /s	2.458 18	2.458 18	2.458 18	2.458 19
角振幅 /(°)	0.747 199	0.896 642	1.046 09	1.195 53
数值计算周期 /s	2.458 20	2.458 21	2.458 22	2.458 24
拟合周期 /s	2.458 20	2.458 21	2.458 22	2.458 24

3　均匀带电细圆环全空间的电势分布和场强分布

均匀带电细圆环是静电场的一个重要的物理模型.如图 3 所示,设环的半径为 R,环的电荷线密度为 $\lambda(\lambda>0)$,根据带电圆环的对称性,选择柱坐标如图 3 所示,设环心位于 O 点,带电圆环在 Oxy 平面,φ 是圆环上任意点 P' 与 O 点的连线 $P'O$ 与 y 轴之间的夹角.空间任意一点 P 距离 Oxy 平面为 z,与 z 轴的距离为 ρ,P 所在的与 z 轴垂直的平面上距离 z 轴相等的点电势相同,所以可以认为 P 点就在 Oyz 平面上,坐标为 $(0,\rho,z)$,根据电势叠加原理,P 点的电势是圆环上所有电荷在该点产生的电势之和

$$U(\rho,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{R^2+z^2+\rho^2-2R\rho\cos\varphi}} \tag{5}$$

令

$$R^2+z^2+\rho^2=a \qquad 2R\rho=b$$

则得到

$$U(\rho,z)=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}} \tag{6}$$

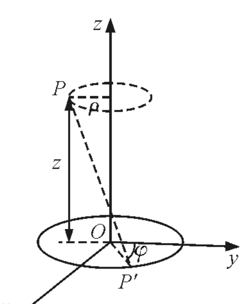


图 3　空间带电细圆环

该式中的积分为椭圆积分,其结果可以用 Mathematica 内置的椭圆函数表示

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a-b\cos\varphi}}=\frac{2\mathrm{Elliptick}[\frac{2b}{-a+b}]}{\sqrt{a-b}}+\frac{2\mathrm{Elliptick}[\frac{2b}{a+b}]}{\sqrt{a+b}} \tag{7}$$

令

$$R=1(\mathrm{m}) \qquad \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}=1(\mathrm{m\cdot N\cdot C^{-1}})$$

得到电势全空间的分布如图 4 所示,从图中可以看出,在靠近线圈的位置即 $(0,\rho,z)=(0,1,0)$,电势有极大值,其他位置电势依次降低,距离线圈很远的位置,电势为零.在线圈内部的平面内,电势比线圈外部高.

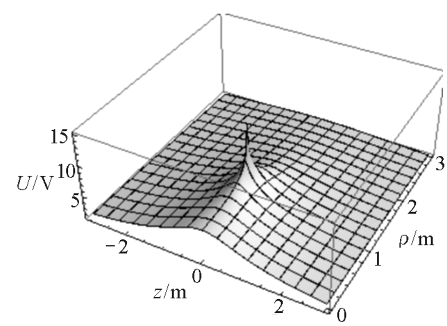


图 4　带电细圆环全空间电势分布

考虑到电荷分布的对称性,可以先计算 Oyz 平面内的电场分布,因为电场强度矢量与电势的微分关系为

$$\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{8}$$

根据式(8)画出的 Oyz 平面内的电力线如图 5 所示.

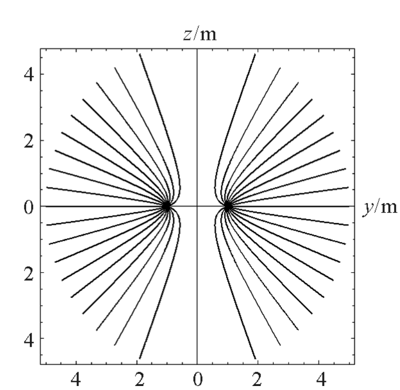
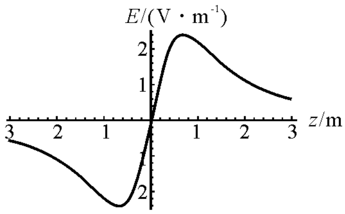


图 5　均匀带电细圆环在 Oyz 平面内的电力线

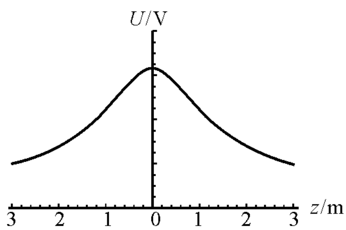
很显然,电力线关于 z 轴对称,将 $y>0$ 或者 $y<0$ 范围内的电力线绕 z 轴旋转任意角度就可以得出空

间其他位置的电力线.

最后,取 z 轴这个特殊的位置进行计算,可以得出通过圆环中心轴上的场强分布和电势分布如图 6 所示.



(a) 电场强度沿z轴的分布



(b) 电势沿z轴的分布

图 6　均匀带电细圆环中心轴的电场强度和电势分布

以上应用Mathematica处理均匀带电细圆环的电势与电场强度问题的过程是先计算全空间的整体分布,再具体到轴线上.解决问题的过程可以加深学生对电场强度和电势这两个物理量以及二者之间关系的理解,其结果用图像的形式表示出来,使学生能够从整体上把握该体系的电场强度和电势分布.这种由一般到特殊的方法好处在于能让学生在处理物理问题的过程中着眼于大局,从更高的层面去分析问题.

4　结论

本文用Mathematica软件对力学和电磁学中两个重要的物理模型进行了深入的研究,给出了单摆小角度的定量解释以及均匀带电细圆环全空间的电势和电场强度分布.这种探索对于教师教学过程以及学生学习过程是非常有益的,而且通过编程计算作图的结果可以直观呈现给学生,加深学生对知识点的理解,提高课堂效率.物理学的问题五花八门,层出不穷,而 Mathematica 软件的计算和绘图功能强大,所以,Mathematica 在物理问题的研究以及辅助物理教学方面的应用前景是非常广阔的.

参考文献

1　唐曙光.在物理教学中使用 Mathematica.物理通报,2003(10):25～26

2　董键.Mathematica 与大学物理计算.北京:清华大学出版社,2010.11～26

3　柳宏德.基于 Mathematica 求解任意摆角下的单摆周期近似公式.大学物理,2014,33(11):52～53

4　杨能彪.基于 Mathematica 的电磁场计算与可视化:[硕士学位论文].成都:西南交通大学,2007.15～20

5　王其申.经典力学(下册).合肥:中国科学技术出版社,2005.46～47

6　M. Alonso,E. J. Finn.大学物理学基础(Ⅰ)力学与热力学.梁宝洪,译.北京:高等教育出版社,1983.348～350

7　C. Kittel.伯克利物理学教程(第一卷),力学(第 2 版).北京:机械工业出版社,2014.216～218

Application Examples of Mathematica in the Teaching of University Physics

Zhao Wenli　Gao Feng　Wang Yonggang　Cao Xuecheng

(College of Information Science And Engineering, ShanDong Agricultural University, Taian, Shandong　271018)

Abstract: Employing the function of numerical simulation of Mathematica, a question of single pendulum for small angle and the electric of uniformly charged ring are discussed . Some conclusions are showed quantitatively and directly. Practice shows that the utilizing of the software is very helpful in improving teaching effectiveness.

Key words: Mathematica; single pendulum; uniformly charged ring