重力加速度随纬度变化的精确值

廖蕴莹　谢元栋
（华南师范大学物理与电信工程学院　广东 广州　511400）

（收稿日期：2019－03－18）

摘　要：把地球当作一个标准椭球体，来讨论重力加速度随纬度的变化，得出了准确的修正关系式，并把解析结果绘制成图像，从而加深对重力加速度的理解.

关键词：地球椭球体　重力加速度　纬度变化

一般情况下，物理学中处理有关力学问题时，取重力加速度 $g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$，更粗略的计算甚至取 $g=10.0\ \mathrm{m/s^2}$. 这种处理方法使求解问题简单方便，精确度也能达到要求. 但实际上，尽管重力加速度随纬度和高度变化不大，但还是有明显的变化. 也就是说，地球表面的重力加速度并不是处处都相等，误差来源于两个方面：一是地球自转产生惯性离心力；二是地球不是严格的球体. 前一种情况，教科书中有详细讨论[1,2]，后一种情况则很少涉及. 本文拟弥补这个缺陷.

众所周知，地球不是一个严格的球体，两极半径小，赤道半径大. 这使重力加速度 g 随纬度的升高而增大的效应更显著. 由于这个原因，各地实测的 g 也要比把地球当成一个球体算出的值大. 下面详细讨论重力加速度与纬度变化的函数关系.

如图 1 所示，可把地球看成是一个长半轴为 $a=6\ 379\ 250\ \mathrm{m}$，短半轴为 $b=6\ 356\ 755\ \mathrm{m}$ 的旋转椭球体，围绕 y 轴做自转运动. 地球不是一个严格的惯性

示，其形似一个波浪.

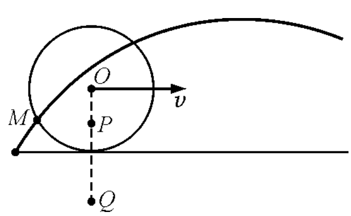

图 13　取 P 点为研究对象

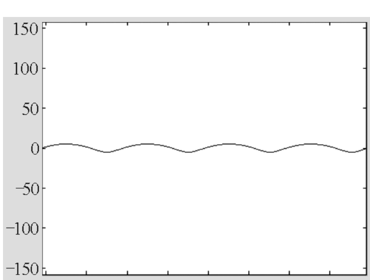

图 14　$r<0.8\ \mathrm{m}$ 时，P 点的运动轨迹

3）若取车轮外的点 Q 作为研究对象，即 $r>0.8\ \mathrm{m}$（如图 13 所示），则 Q 点的运动轨迹如图 15 所示，结果呈现为摆线形状.

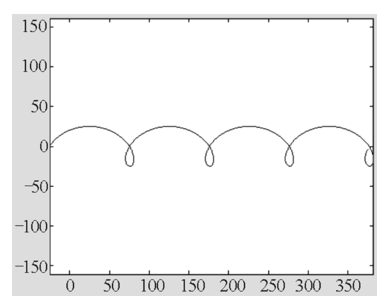

图 15　$r>0.8\ \mathrm{m}$ 时，Q 点的运动轨迹

4　结束语

当笔者将所发现的结果向学生一一展示，学生学习的好奇心高涨，这不仅仅是结论也包括探究的过程. 这就给我们一个启发，那就是对于一个看似简单的事物如果进行细致的研究和分析，往往会带来意想不到的惊喜. 物理教学的目的是培养学生的科学素养、激发他们的想象，知道物理课程不是单调枯燥的，其关键是教师以何种方式激发学生的兴趣，并把这种力量带到学习中去.

系,其自转的角速度为

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3\ 600}\ \mathrm{s}^{-1} = 7.29 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1} \quad (1)$$

其中 T 是地球自转周期.

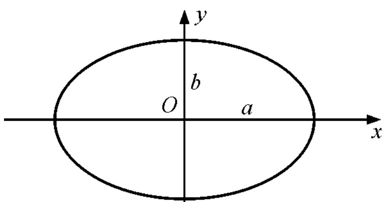

图 1　地球自转运动示意图

在纬度为 λ 处,地面上质量为 M 的物体,地球自转角速度为 Ω,物体到地心的距离为 R. 地球的表面方程为 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$,此方程转换到球坐标系为

$$R = R(\lambda) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\ \sin^2\lambda + b^2\ \cos^2\lambda}} \quad (2)$$

而物体 M 的受力分析图如图 2 所示.

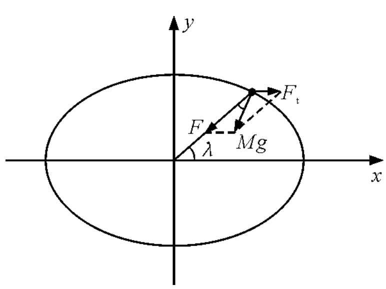

图 2　物体 M 受力分析

对于地面上的观察者来说,物体受到两个力:地球引力 F 和惯性离心力 F_t. 实际所观察到的重力 Mg 是 F 和 F_t 的合力

$$M\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t \quad (3)$$

如果认为地球是均匀的刚性球体,则 F 的值各地相同. 但 F_t 的值随纬度 λ 而变:

$$F_t = Ma\Omega^2 \cos\lambda \quad (4)$$

因此 Mg 的大小和方向都随纬度 λ 而变,大小的变化反应在重力加速度 g 随 λ 的变化,方向的变化反应在 Mg 的方向和引力 F 方向之间的夹角 α 随 λ 的变化. 下面我们来找出 g 和 α 随 λ 变化的函数关系.

将 F,F_t 和 Mg 之间的关系用如图 3 所示的三角形来表示[2].

从图中可看出

$$F_t \sin\lambda = Mg \sin\alpha \quad (5)$$

$$F \sin\lambda = Mg \sin(\lambda + \alpha) \quad (6)$$

$$F = Mg \cos\alpha + F_t \cos\lambda \quad (7)$$

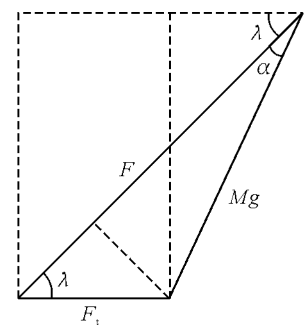

图 3　F,F_t 和 Mg 的关系

而根据万有引力定律

$$F = G\frac{m_{地} M}{a^2\ \cos^2\lambda + b^2\ \sin^2\lambda} \quad (8)$$

将式(4) 代入式(5) 得

$$\sin\alpha = \frac{a\Omega^2 \sin 2\lambda}{2g} \quad (9)$$

由于 $\alpha \propto \Omega^2$,故很小. 则有 $\sin\alpha \approx \alpha$,$\cos\alpha \approx 1$. 联立式(7) 和式(8) 得

$$\frac{Gm_{地} M}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda} = Mg + Ma\Omega^2\ \cos^2\lambda \quad (10)$$

即

$$g = \frac{Gm_{地}}{a^2 \cos^2\lambda + b^2 \sin^2\lambda} - a\Omega^2 \cos^2\lambda \quad (11)$$

在赤道处,$\lambda = \alpha = 0$,$g = g_0$,则根据式(11),可得

$$\frac{Gm_{地}}{a^2} = g_0 + a\Omega^2 \quad (12)$$

将式(12) 代入式(11),则得出 g 随 λ 变化的近似公式

$$g = \frac{(g_0 + a\Omega^2)a^2}{a^2\ \cos^2\lambda + b^2\ \sin^2\lambda} - a\Omega^2\ \cos^2\lambda =$$

$$(g_0 + a\Omega^2)(1 - e^2\ \sin^2\lambda) - 1 - a\Omega^2\ \cos^2\lambda \approx$$

$$g_0(1 + \frac{a\Omega^2}{g_0}\ \sin^2\lambda + \frac{a\Omega^2 e^2}{g_0}\ \sin^2\lambda + e^2\ \sin^2\lambda) \quad (13)$$

把 $g_0 = 9.758\ 8\ \mathrm{m/s^2}$ 代入式(13),于是得到 g 的近似公式

$$g = 9.780\ 3(1 + 0.010\ 5\ \sin^2\lambda) \quad (14)$$

根据式(14) 算得 g 的数据如表 1 所示.

表 1　根据式(14) 算得 g 的数据

λ/(°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
g	9.780 3	9.783 4	9.792 3	9.806 0	9.822 7	9.840 6	9.857 3	9.866 7	9.871 0	9.883 0

根据式(13)算得 g 的变化趋势如图 4 所示.

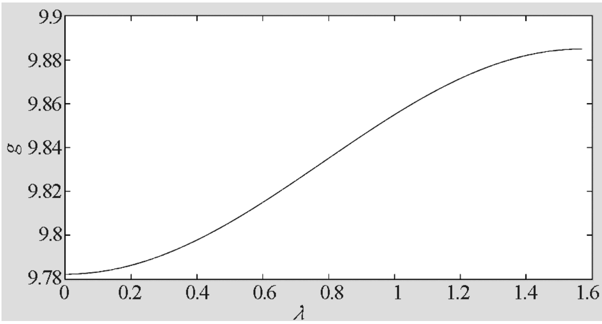

图 4　根据式(13)算得 g 的变化趋势

根据式(13)算得 g 的变化快慢如图 5 所示.

由图像可以得出结论,重力加速度 g 随纬度 λ 的增加而增加.在赤道附近,重力加速度增长得比较缓慢.随着纬度的增加,重力加速度增长变快.在纬度为 45° 时,重力加速度增长最快.在两极附近,重力加速度增长又变得比较缓慢.

查阅资料得出[2],当把地球看成是一个球体时,重力加速度 g_1 的近似公式为

$$g_1 = 9.780\,3(1 + 0.005\,3\sin^2\lambda) \tag{14}$$

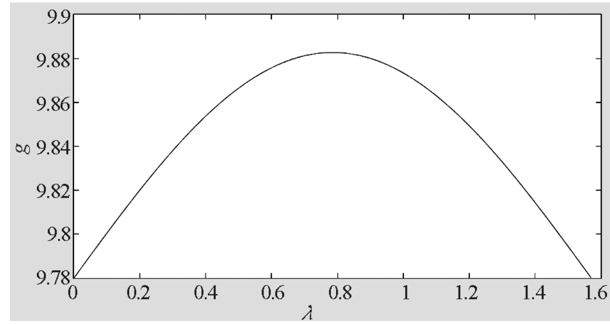

图 5　根据式(13)算得 g 的变化快慢

把式(14)所算得的 g_1 与式(13)所算的 g 相比较,数据如表 2 所示.

利用表 2 的数据与实际测量的重力加速度值进行比较

① 在赤道 $\lambda = 0$ 处,g 的实测值 $g_{测} = 9.780$ m/s^2.

表 2　g_1 与 g 数据对比

λ/(°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
g_1	9.780 3	9.781 9	9.786 3	9.793 2	9.801 7	9.810 7	9.819 1	9.826 1	9.830 6	9.832 1
g	9.780 3	9.783 4	9.792 3	9.806 0	9.822 7	9.840 6	8.857 3	9.866 7	9.871 0	9.883 0

根据式(13)计算得

$$g = 9.780\,3(1 + 0.010\,5\sin^2\lambda) = 9.780\,3\ \mathrm{m/s^2}.$$

相对误差为 0.2%.

根据式(14)计算得

$$g_1 = 9.780\,3(1 + 0.005\,3\sin^2 0) = 9.780\,3\ \mathrm{m/s^2}$$

相对误差为 0.2%.

② 在极点 $\lambda = \frac{\pi}{2}$ 处,g 的实测值 $g_{测} = 9.884\,5$ m/s^2.

根据式(13)计算得

$$g = 9.7803\left(1 + 0.0105\sin^2\frac{\pi}{2}\right) = 9.883\,0\ \mathrm{m/s^2}$$

相对误差为 0.02%.

根据式(14)计算得

$$g_1 = 9.7803(1 + 0.0053\sin^2\frac{\pi}{2}) = 9.832\,1\ \mathrm{m/s^2}$$

相对误差为 0.5%.

并把式(13)和式(14)作比较,如图 6 所示,比较结果略有偏差.

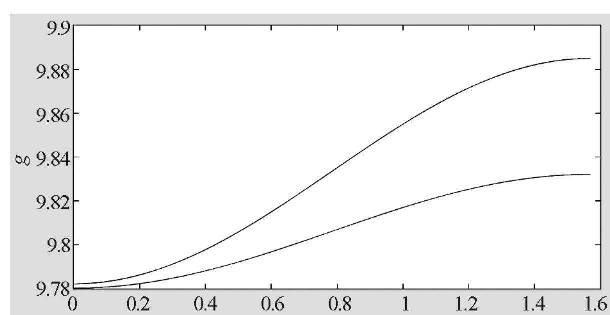

图 6　式(13)和式(14)所得结果对比图

结论:当把地球当作一个旋转椭球体而非球体时,重力加速度随着纬度的增加会变得更明显.这个结果应该更精确,是某些精确计算中需要考虑的修正.

参 考 文 献

1　人民教育出版社.普通高中课程标准实验教科书物理·必修 1(第 2 版).北京:人民教育出版社,2006.43 ～ 44

2　金尚年.经典力学(第一版).上海:复旦大学出版社,1989

3　于军风.地球自转、形状和重力加速度随纬度的变化.大学物理,2013,32(6):14 ～ 17