高观点下统一解析电磁感应中3类含电容动力学问题

曹　鹏
（重庆市实验中学　重庆　401320）
李　力　朱远稼
（重庆市清华中学　重庆　400054）

（收稿日期：2019－04－21）

摘　要：含电容的“U”形水平金属框架回路中导体棒切割匀强磁场运动的动力学问题，分“无外力充电式”“有外力充电式”“放电式”3类情况，通常分别使用不同方法求解，不容易看出它们之间的内在联系从而妨碍对物理意义的认识．本文从更高的观点出发，通过设置最一般化的初始条件参数，建立统一的微分方程，得到一般性结果后，再导出3类情况的特解，能够清楚地看出它们的联系和物理意义．

关键词：含电容动力学问题　统一解析　微分方程　特解

文献[1～7]研究了含电容的“U”形水平金属框架回路中导体棒做垂直切割匀强磁场运动的动力学问题，文献[6]将这些问题分为“无外力充电式”“有外力充电式”“放电式”3类情况．虽然相关文献较多，但由于分别使用不同的特殊方法求解，不容易看出这些貌似各异的问题之间存在深刻联系和统一的本质，从而难以准确理解结果的物理意义．本文从更高的观点出发，通过设置最一般化的初始条件参数，建立统一的微分方程，得到一般性结果，再导出3类情况的特解，能够清楚地看出它们的联系和物理意义．

1　一般问题的推导

一般问题表述如下：如图1所示，水平光滑导轨处在竖直向下、大小为B的匀强磁场中，导轨间距为L，电容器的电容为C，初始时刻电荷量为q_0，电阻阻值为R．质量为m，电阻为r的导体棒ab垂直导轨放置，水平向右的恒力F垂直作用在ab棒上，初速度v_0水平向右．假设电容器两极板间电压始终小于耐压值，导轨电阻不计，求回路电流、导体棒速度分别与时间的关系．

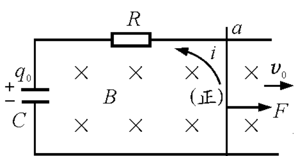

图1　含电容器类问题情境图

假定初始时刻导体棒的电动势比电容器两极板间的电压大，水平恒力F比导体棒所受安培力大，取电流逆时针绕向为正方向，在任意t时刻对全电路有

$$BLv = i(R+r) + \frac{q}{C} \tag{1}$$

对电容有

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

对导体棒有

$$F - BiL = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

初始条件为

$$\begin{gathered} v_0 \\ u_0 = \frac{q_0}{C} \\ i_0 = \frac{BLv_0 - u_0}{R+r} \end{gathered} \tag{4}$$

式(1)对时间微商后将式(2)代入得

$$BL\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (R+r)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i$$

化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R+r}{BL}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{CBL}$$

把此式代入式(3)得

$$F - BiL = \frac{m(R+r)}{BL}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{CBL}i$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}i=\frac{BLF}{m(R+r)}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\lambda i=\xi \tag{5}$$

其中 $\lambda=\dfrac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}$ $\xi=\dfrac{BLF}{m(R+r)}$ (6)

显然一阶线性常系数微分方程式(5) 对应的齐次方程的通解为 $i=C_1\mathrm{e}^{-\lambda t}$,检验易得到式(5) 的特解为

$$i=\frac{\xi}{\lambda}=\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}\text{(常量)}$$

故式(5) 的通解为

$$i=\frac{\xi}{\lambda}+C_1\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}+C_1\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{7}$$

因 $t=0$ 时

$$i=i_0=\frac{BLv_0-u_0}{R+r}$$

代入解得

$$C_1=\frac{BLv_0-u_0}{R+r}-\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}=i_0-\frac{\xi}{\lambda}$$

故回路电流

$$i=\frac{\xi}{\lambda}+\left(i_0-\frac{\xi}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}=\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}+\left(\frac{BLv_0-u_0}{R+r}-\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t} \tag{8}$$

将式(8) 代入式(3),分离变量后积分

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t\frac{1}{m}\left\{F-BL\left[\frac{\xi}{\lambda}+\left(i_0-\frac{\xi}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]\right\}\mathrm{d}t$$

解得导体棒的速度为

$$v=v_0+\frac{Ft}{m}-\frac{BL}{m\lambda}\left[\xi t-\left(i_0-\frac{\xi}{\lambda}\right)(\mathrm{e}^{-\lambda t}-1)\right]=v_0+\frac{F}{m+CB^2L^2}t+\frac{CBL}{m+CB^2L^2}\left[(BLv_0-u_0)-\frac{CBLF(R+r)}{m+CB^2L^2}\right](\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}-1) \tag{9}$$

上述式(8)、(9) 就是回路电流、导体棒速度随时间变化的规律.当然还可以进一步推出导体棒加速度 a、电容器电荷量 q 随时间变化的规律,此处不再赘述.

2 3 类特殊情况的解及其物理意义

2.1 “无外力充电式”—— 特殊情况之一

如图 2 所示,初始条件中仅有初速度不为零,在式(8)、(9) 中令 $F=0$ 和 $u_0=0$,故电流、速度规律分别为

$$i=\frac{BLv_0}{R+r}\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t} \tag{10}$$

$$v=v_0+\frac{CB^2L^2v_0}{m+CB^2L^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}-1\right] \tag{11}$$

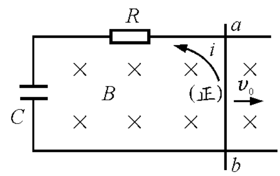

图 2 无外力充电式

电流 i 随 t 时间呈指数衰减,$t\to\infty$ 时 $i\to 0$,$v\to\dfrac{m}{m+CB^2L^2}v_0$.

文献[5] 依据能量守恒,用导体棒动能的损失减去电容器末态储能,间接计算出回路产生的焦耳热为

$$Q=\frac{mCB^2L^2v_0^2}{2(m+CB^2L^2)}$$

由于此式不含回路电阻$(R+r)$,不禁让人产生疑问:回路中的能量损失是否为回路电阻上的焦耳热,或是有其他形式的能量损失? 为何 Q 的表达式与$(R+r)$ 无关? 如果假设“不计回路电阻$(R+r)$”,这样的假设是否合理? 文献[1 ~ 7] 虽有提及但未能对上述问题透彻分析,我们不妨根据式(10) 作出定量解析.

$$Q=\int_0^\infty i^2(R+r)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{(BLv_0)^2}{R+r}\mathrm{e}^{-2\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}\mathrm{d}t=\frac{(BLv_0)^2}{R+r}\,\frac{mC(R+r)}{-2(m+CB^2L^2)}\mathrm{e}^{-2\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}\Bigg|_0^\infty=\frac{mCB^2L^2v_0^2}{2(m+CB^2L^2)} \tag{12}$$

所得结果与文献[5] 从能量守恒算出的数值完全一致.众所周知,电流 i 衰减为初始值的 e^{-1} 所需时间(即时间常数) 为

$$\tau=\frac{mC(R+r)}{m+CB^2L^2}\propto(R+r)$$

而初始功率

$$\frac{(BLv_0)^2}{R+r}\propto\frac{1}{R+r}$$

从式(12) 的运算过程可以看出,二者相乘时$(R+r)$正好约掉,这就是 Q 的表达式与$(R+r)$ 无关的原因,

这也在一定程度上掩盖了“电路能量损失为$(R+r)$上产生的焦耳热”的事实.顺便指出,能量损失大小虽然与$(R+r)$数值无关,但$(R+r)$会影响这个暂态过程的趋稳时间.

2.2　“有外力充电式”—— 特殊情况之二

如图 3 所示,根据初始条件令 $q_0=0$,$v_0=0$,则式(8)、(9)退化为

$$i=\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}\right] \tag{13}$$

$$v=\frac{F}{m+CB^2L^2}t-\frac{C^2B^2L^2F(R+r)}{(m+CB^2L^2)^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}-1\right] \tag{14}$$

当 $t\to\infty$ 时回路电流、导体棒速度分别收尾为

$$i\to\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}$$

和

$$v=\frac{C^2B^2L^2F(R+r)}{(m+CB^2L^2)^2}+\frac{F}{m+CB^2L^2}t$$

这意味着稳定时电流恒定而导体棒做匀加速运动.

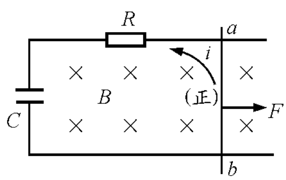

图 3　有外力充电式

如果假设回路总电阻 $R+r=0$,则回路电流一直恒为

$$i=\frac{CBLF}{m+CB^2L^2}$$

导体棒速度为

$$v=\frac{F}{m+CB^2L^2}t$$

表明从初始时刻起便一直做匀加速直线运动.这时导体棒产生的电动势正好等于电容器极板电压,如 2013 年高考全国新课标Ⅰ卷第 25 题就属于这种情况,学生可用初等方法求解,如果假设总电阻 $R+r\neq 0$,则初等方法不能求解,题目超出了高考考纲要求.

2.3　“放电式”—— 特殊情况之三

如图 4 所示,按照初始条件要求,此处令 $F=0$,$v_0=0$,式(8)、(9)退化为

$$i=\frac{-q_0}{C(R+r)}\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t} \tag{15}$$

$$v=\frac{BLq_0}{m+CB^2L^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{m+CB^2L^2}{mC(R+r)}t}\right] \tag{16}$$

式(15)中负号表示电流方向为顺时针,即电容器放电,$t\to\infty$ 时

$$i\to 0 \qquad v\to\frac{BLq_0}{m+CB^2L^2}$$

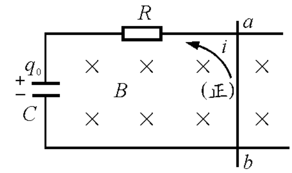

图 4　放电式

根据能量守恒,将电容器储能的损失减去导体棒所获动能,可得电路损失的能量即回路产生的焦耳热

$$Q=\frac{mq_0^2}{2C(m+CB^2L^2)}$$

表达式仍然与$(R+r)$无关.其原因与 2.1 中所述一样,此处不再赘述.可见这一类问题同上述 2.1 问题类似,不考虑回路电阻$(R+r)$也是不合理的.

3　结束语

综上所述,本文从更高的观点出发,通过设置最一般化的初始条件参数,建立统一的微分方程,针对这 3 类貌似各异的问题,得到了一般性结果,详细分析了 3 类特解情况的物理意义.这个统一的解析方法得益于建立并求解尽量一般化的初始条件下的微分方程,可见灵活地借助数学语言,能看清楚不同物理现象背后隐蔽而统一的规律与内在联系.

参 考 文 献

1　黄健康.有无电阻的导体棒都能做匀加速直线运动吗[J].物理教师,2016(10):62 ～ 63

2　郑金.对两道电磁感应试题的探讨[J].物理通报,2017(4):26 ～ 28

3　赵林明.对 2013 年新课标 Ⅰ 卷高考压轴试题科学性追问的解答[J].物理教师,2014(3):67 ～ 68

4　黄尚鹏.为什么必须忽略所有电阻[J].物理通报,2014(3):96 ～ 97

5　程稼夫.中学奥林匹克竞赛物理教程电磁学篇(第 2 版)[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2014.417 ～ 418

6　赵怀彬.电磁感应中电容器问题的三类模型[J].物理教学,2014(8):49 ～ 50

7　郑金.“电容·滑杆”类竞赛题的多解[J].中学物理教学参考,2011(7):30 ～ 32