运动的合成与分解在磁场章节中的应用

余 辉
(乌鲁木齐市八一中学 新疆 乌鲁木齐 830002)

(收稿日期:2019-05-12)

摘 要:运动的合成与分解一般用于两个直线运动的合成和一般曲线运动的分解,但一道关于带电粒子在磁场中运动的高考模拟题却给人启示,带电粒子的圆周运动也可以分解与合成,有关习题除了用传统的几何关系求解外,也可以用运动的合成与分解知识求解.

关键词:运动的合成与分解 磁场 单直线边界

运动的合成与分解位于人教版《物理·必修 2》曲线运动章节,有了运动的合成与分解,曲线运动便可以和直线运动紧密联系起来.运动的合成与分解强调运动的等效性、同时性、独立性,这几个特点是认识人船模型、平抛运动等的关键.在考试中运动的合成与分解可以和很多知识点结合起来出题,比如匀变速直线运动、动能定理、功能关系、静电场等等.但是,与带电粒子在磁场中运动章节的结合却很少出现,主要原因是带电粒子在匀强磁场中通常做的是匀速圆周运动,很少会涉及运动的合成与分解,较多的是与几何知识的结合.然而一道物理题的出现使笔者开始思考这两块知识的联系.

1 一道高考模考题的求解

【例 1】(2019 年乌鲁木齐市一模)如图 1 所示,在 MN 和 PQ 间有竖直向上的匀强电场,场强大小为 E,电场宽度为 d.在 MN 的上方有一磁感应强度方向水平向外的圆形匀强磁场区,O 为圆心,其半径为 d,CD 为平行于 MN 的直径,圆心 O 到 MN 的距离为 $2d$.一个质量为 m,电荷量为 q 的带正电的粒子(重力不计),以某一速度从 PQ 连线上的 A 点水平向右射入电场,带电粒子穿出电场后从 C 点进入磁场并从 D 点穿出.求:

(1) 带电粒子从 A 点运动到 C 点的时间 t;

(2) 磁场区内磁感应强度 B 的大小.

分析:第(1) 问粒子在电场中做类平抛运动,出去后做匀速直线运动.若只关心竖直方向的运动,在电场中是类自由落体运动,加速度 $a=\dfrac{Eq}{m}$,位移 $d=\dfrac{1}{2}at_1^2$,末速度 $v_{1y}=at_1$;出电场后,竖直方向位移 $2d=v_{1y}t_2$,总时间 $t=t_1+t_2$,得

$$t=2\sqrt{\frac{2\mathrm{md}}{Eq}}$$

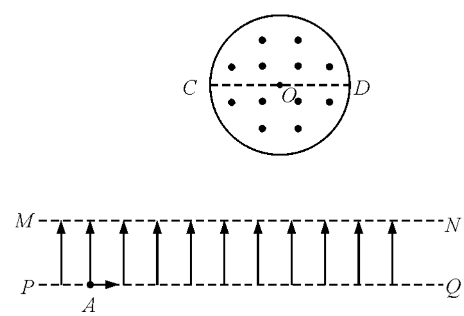

图 1 例 1 题图

第(2) 问,题目中告诉我们带电粒子是从 C 点射入,从 D 点射出,首先想到的是可以利用我们在磁场问题中总结过的单直线边界问题结论:入射角等于出射角,圆心角是入射角的 2 倍.

如图 2 所示,找圆心、定半径后知道圆弧所对圆心角等于速度偏转角 θ,要计算磁感应强度 B 的大小,一般要先算出磁场中圆周运动半径 r,由向心力公式,有

$$qvB=m\frac{v^2}{r} \tag{1}$$

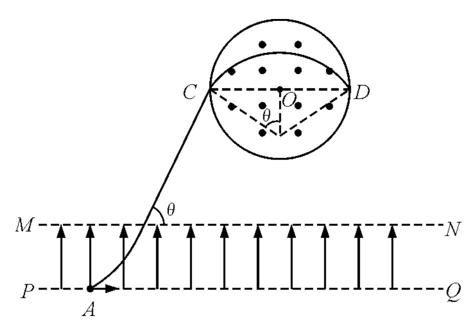

图 2 粒子运动轨迹分析

列出式(1) 发现速度 v 未知，然后列出式(2)

$$\sin\theta = \frac{v_{1y}}{v} \tag{2}$$

又发现 θ 角未知，回头看看第一问发现 θ 角根本无法解出，无奈之下再找几何关系，列出式(3)

$$\sin\theta = \frac{d}{r} \tag{3}$$

联立式(1)、(2)、(3)，“神奇”地发现

$$d = \frac{mv_{y_1}}{qB}$$

即

$$\frac{x_{CD}}{2} = \frac{mv_{y_1}}{qB}$$

θ 角消掉了，将第一问 v_{1y} 代入即可求出 B 值. 也就是说磁场确定，电荷荷质比确定的情况下，CD 长度只与垂直于 CD 方向的速度有关.

2　利用运动的合成与分解来进一步验证结论

以上是对这道题的分析，由以上题目得出结论：单直线边界问题中粒子入射点与出射点之间的距离 L(图 3) 在 q，m，B 已确定的情况下，只由入射速度在垂直于边界方向的分速度 v_y 来决定，等于以 v_y 做圆周运动的直径，即 $L = \frac{2mv_y}{qB}$. 此结论可以作为我们以后解题的二级结论使用，但是看着结论不禁产生疑问，为什么 L 长度仅由 v_y 来决定，它的根本原因是什么，刚才题目中只是几何关系的一个推导，是否有其他方法进一步证明呢？

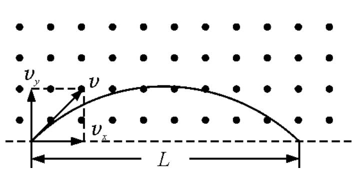

图 3　粒子入射点出射点的间距

接下来，笔者将会从运动的合成与分解上来论证结论. 图 4 中某带电荷量为 q，质量为 m 的正粒子由某一点以垂直于匀强磁场方向的速度 v 开始运动，磁感应强度为 B. 以起点为原点建立直角坐标系，并且将速度 v 分解为 x 方向与 y 方向两个分速度 v_x 和 v_y，带电粒子在磁场中的圆周运动可以分解为 v_y 对应的圆周运动 1 与 v_x 对应的圆周运动 2，两个圆周运动对应半径分别为 $R_1 = \frac{mv_y}{qB}$，$R_2 = \frac{mv_x}{qB}$，分别作出两个圆周运动的部分轨迹. 两个圆周运动的周期 $T_1 = T_2 = \frac{2\pi m}{qB}$，同时两个分运动具有等时性，由 $\frac{t}{T} = \frac{\theta}{2\pi}$ 得两个圆周运动转过的角度始终相等，假设经过时间 t 都转过 θ 角度.

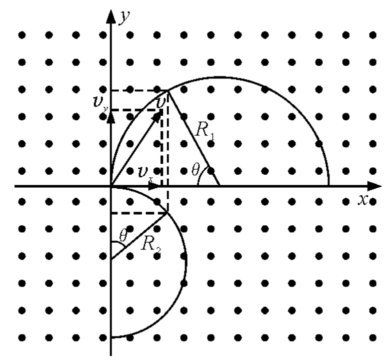

图 4　分解后的两个圆周运动

现要计算合运动(即实际运动)与 x 轴交点坐标 L，L 必然等于当两个分运动在 y 方向上位移等大反向时 x 方向位移 x_1 与 x_2 之和，即 $L = x_1 + x_2$.

分运动 1 在 y 方向位移

$$y_1 = R_1\sin\theta$$

x 方向位移

$$x_1 = R_1 - R_1\cos\theta$$

分运动 2 在 y 方向位移大小

$$y_2 = R_2 - R_2\cos\theta$$

x 方向位移

$$x_2 = R_2\sin\theta$$

当 $y_1 = y_2$ 时

$$R_1\sin\theta = R_2 - R_2\cos\theta \tag{4}$$

得

$$R_2 = \frac{R_1\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$L = x_1 + x_2 = R_1 - R_1\cos\theta + R_2\sin\theta$$

将式(4) 结果代入得

$$L = \frac{R_1 - 2R_1\cos\theta + R_1\cos^2\theta + R_1\sin^2\theta}{1-\cos\theta} =$$

$$2R_1 = \frac{2mv_y}{qB}$$

结论得到了验证.

3　拓展

拓展一：计算图 4 中粒子实际运动中在 x 轴正方向上与出发点相距最远点的距离为多少？

解：设在 x 轴正方向粒子的实际运动距离为 X，则

$$X = x_1 + x_2 =$$

$$R_1 - R_1\cos\theta + R_2\sin\theta = R_1 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$X_m = R_1 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = R_1 + R = \frac{mv_y}{qB} + \frac{mv}{qB}$$

只需知道 y 方向分速度 v_y 与实际速度 v 即可求出 X 最大值 X_m.

拓展二: 计算图 4 中粒子实际运动中在 y 轴负方向上与出发点相距最远点的距离为多少?

解: 设粒子沿 y 方向运动的距离为 Y,则

$$Y = y_1 + y_2 =$$

$$R_1\sin\theta + R_2 - R_2\cos\theta = R_2 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2}\sin(\theta+\beta)$$

$$Y_m = R_2 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = R_2 + R = \frac{mv_x}{qB} + \frac{mv}{qB}$$

只需知道 x 方向上分速度 v_x 与实际速度 v 即可求出 Y 最大值 Y_m.

拓展一与拓展二的结果,利用传统方法 —— 找几何关系,也可得出相同的结论,这里不再赘述.

4 应用

【例 2】(衡中同卷第 25 题) 如图 5 所示,矩形区域 $MNOP$ 内存在沿 y 轴负方向的电场,电场强度大小 E 与时间 t 的关系满足 $E = 0.5\,t$,矩形区域各顶点的坐标分别为 $M(-0.8\ \text{m}, 0.3\ \text{m})$、$N(0, 0.3\ \text{m})$、$O(0, 0)$、$P(-0.8\ \text{m}, 0)$,在电场下边界 PO 处放置绝缘挡板,粒子不能通过,打到挡板上的粒子被挡板吸收,且不影响电场. y 轴的右侧空间内存在方向垂直于纸面向里、范围足够大的匀强磁场,磁感应强度 $B = \frac{2}{375}$ T. $t = 0$ 时刻开始,位于 M 处的粒子发射器连续不断地沿 MN 方向发射同种带正电的粒子,已知粒子的初速度 $v_0 = 10^4$ m/s,粒子的比荷 $\frac{q}{m} = 9.375 \times 10^6$ C/kg,不考虑粒子的重力、粒子间的相互作用和对电场的影响,粒子通过电场的时间极短,在这段时间内可认为电场强度不发生变化.

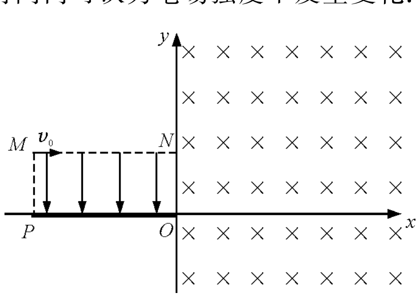

图 5 例 2 题图

(1) 求进入磁场后,偏转半径最大的粒子在 M 处发射的时刻;

(2) 要使从 O 点进入磁场的粒子能回到 y 轴,求磁场沿 x 轴方向的最小宽度;

(3) 求粒子的运动轨迹与 y 轴的两个交点间的距离.

解: (1) 进入磁场速度越大,半径就越大,所以从 O 点进入磁场的粒子对应半径最大.

x 轴方向 $\quad x_{MN} = v_0 t$

y 轴方向 $\quad y_{NO} = \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t^2 \qquad E = 0.5t_1$

得 $\quad t_1 = 20$ s $\qquad v_y = \frac{Eq}{m}t = 7\ 500$ m/s

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = 12\ 500\ \text{m/s}$$

(2) 利用拓展一得 x 轴方向最小宽度

$$x_m = \frac{mv_y}{qB} + \frac{mv}{qB}$$

得 $\quad x_m = 0.4$ m

(3) 利用结论一得 y 轴两个焦点之间距离

$$l_y = \frac{2\ mv_0}{qB} = 0.4\ \text{m}$$

以上(2)、(3) 两问充分利用了推出来的结论,不用找几何关系就可求解.

5 启发

对于以往关于带电粒子在磁场中运动的习题,我们一般是按照找圆心、定半径的基本步骤进而利用几何关系来求解,这常常会使学生感到艰难,主要原因是这里用到的几何知识大多为平面几何知识,学生只是在初中时学习过,时间久远,已经没那么熟悉了,物理课程时间紧,不可能对几何关系全面复习;另外,求解习题除了对几何知识有要求外,也对学生作图水平有不低的要求. 这些都造成了磁场习题的难度大,学生怕,老师愁.

这道高考模拟题以及后面的拓展和应用给人启示:带电粒子在磁场中运动的习题也可以用运动的合成与分解这一学生熟悉、物理教师喜欢的方法来求解;并不是只有普通曲线运动可以分解,圆周运动也一样快可以分解. 一些由几何关系推出来的看起来不太好理解的结论也可以用运动的合成与分解来解释.