竞赛与物理专题研修

对称光滑曲线上滑动端点悬链线的平衡位形*

沈旭东
（湖州市吴兴高级中学　浙江 湖州　313000）
邱为钢
（湖州师范学院理学院　浙江 湖州　313000）

（收稿日期：2019-05-30）

摘　要：给出了同高度两端点之间悬链线的参数方程.悬链两个端点可以在对称光滑曲线上自由滑动，得到了长度不变，端点坐标和端点张力与曲线垂直 3 个约束方程.对于直线和双曲线上自由滑动的悬链线，数值求解 3 个约束方程，得到悬链最低点的坐标、端点参数值和长度参数值，并画出了悬链线的平衡位形.

关键词：悬链线　曲线　滑动　平衡位形

一个质量均匀分布的链条，两端固定且在同一高度，在重力场中的平衡位形是双曲余弦函数.文献[1]讨论了重心问题，文献[2]讨论了光滑钉子上的悬挂问题.文献[1]中两个端点是固定的，文献[2]中链条是搭放在两个端点（钉子）上的.如果链条的两个端点可以在光滑曲线上自由移动，那么此时悬链线的平衡位形是什么？

1　链条形状的参数方程

设链条的总长度为 $2l$，两等高悬点间的距离为 $2d$，链条单位长度的质量为 λ，图 1 中链条最低点记为 O'，设 $O'P$ 段绳子长度为 s，θ 为链条上过 P 点的切线与水平方向的夹角.

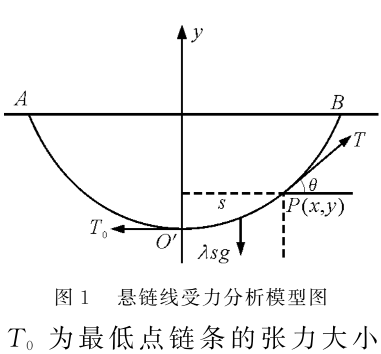

图 1　悬链线受力分析模型图

图中 T_0 为最低点链条的张力大小，令 $T_0 = a\lambda g$，a 称为长度参数.由 $O'P$ 段绳子受力平衡可以得到 $s = a\tan\theta$.以最低点 O' 为坐标原点，作变量代换 $\tan\theta = \sinh\tau$，可以得到悬链线的参数方程

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\tau \cos\theta \mathrm{d}s = a\tau \\ y &= \int_0^\tau \sin\theta \mathrm{d}s = a(\cosh\tau - 1) \end{aligned} \tag{1}$$

设链条最低点到最高点的垂直距离（高度）是 h，端点的参数是 τ_0，那么悬链线的半宽度 d，高度 h，半长度 l 有以下表示

$$\begin{aligned} d &= a\tau_0 \\ h &= a(\cosh\tau_0 - 1) \\ l &= a\sinh\tau_0 \end{aligned} \tag{2}$$

2　约束方程

假如悬链的两端可以在光滑曲线上自由移动，那么平衡时的悬链线形状如何表示？由于上节的悬链线是对称的，为简单起见，假设这个光滑曲线关于 y 轴是对称的，悬链线关于 y 轴也是对称的，即两个端点在同一高度.上节中悬链线的参数表示式(1)是相对最低点的，所以我们需要确定最低点的坐标.设平衡时悬链线的最低端坐标是 $(0, y_c)$，那么悬链线一个端点（譬如右端）的坐标是

$$\begin{aligned} x &= a\tau_0 \\ y &= y_c + a(\cosh\tau_0 - 1) \end{aligned} \tag{3}$$

设曲线的函数方程是 $f(x, y) = 0$，悬链线的端点在

* 浙江省“十三五”师范教育创新工程.
作者简介：沈旭东（1991-　），男，主要从事高中物理教学工作.

曲线上,由此得到

$$f[a\tau_0, y_c + a(\cosh \tau_0 - 1)] = 0 \tag{4}$$

由微分几何的知识可知,曲线在某一点的法向向量正比于 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$,悬链线端点切向方向正比于 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = a(1, \sinh \tau_0)$,这两个方向是一样的,由此得到

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \sinh \tau_0 \tag{5}$$

由式(2),悬链线的长度约束是

$$l = a\sinh \tau_0 \tag{6}$$

如果曲线的函数方程具体给出,那么求解式(4)～(6)这 3 个方程,就能得到长度参数 a,端点参数 τ_0 和最低端坐标 y_c 的值,从而得到悬链线的平衡位形.

3　两直线上自由滑动的悬链线

为简单起见,设右边直线方程为

$$f(x, y) = x + y$$

由式(5)得到 $\sinh \tau_0 = 1$. 设悬链半长度为 1,由式(6)长度参数 $a = 1$,由式(4)

$$\tau_0 + y_c + \cosh \tau_0 - 1 = 0 \tag{7}$$

数值求解得到两个参数值分别为 $\tau_0 = 0.8814$ 和 $y_c = -1.295\ 6$,由此得到两个直线上自由滑动悬链线的平衡位形如图 2 所示.

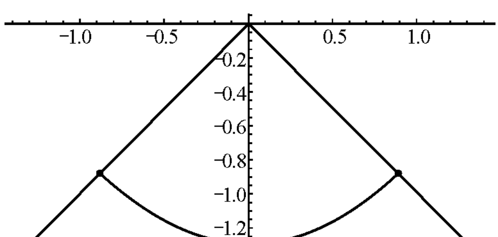

图 2　两个直线上自由滑动悬链线的平衡位形

3　双支双曲线上自由滑动的悬链线

为简单起见,设双曲线方程为

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$$

由式(4)得到

$$(a\tau_0)^2 - [y_c + a(\cosh \tau_0 - 1)]^2 - 1 = 0 \tag{8}$$

由式(5)得到

$$-\frac{y_c + a(\cosh \tau_0 - 1)}{a\tau_0} = \sinh \tau_0 \tag{9}$$

设悬链线的半长度为 2,由式(6),长度约束方程是

$$2 = a\sinh \tau_0 \tag{10}$$

数值求解得到

$a = 2.393\ 9$　$\tau_0 = 0.760\ 116$　$y_c = -2.245\ 75$

由此得到双曲线上自由滑动悬链线的平衡位形如图 3 所示.

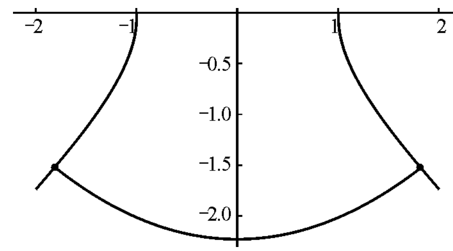

图 3　双支双曲线上自由滑动悬链线的平衡位形

4　单支双曲线上自由滑动的悬链线

为简单起见,设双曲线方程为

$$f(x, y) = -x^2 + y^2 - 1$$

由式(4)得到

$$-(a\tau_0)^2 + [y_c + a(\cosh \tau_0 - 1)]^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

由式(5)得到

$$-\frac{y_c + a(\cosh \tau_0 - 1)}{a\tau_0} = \sinh \tau_0 \tag{12}$$

设悬链线的半长度为 2,由式(6),长度约束方程是

$$2 = a\sinh \tau_0 \tag{13}$$

数值求解得到

$a = 1.725\ 81$　$\tau_0 = 0.989\ 379$　$y_c = -2.894\ 62$

由此得到双曲线上自由滑动悬链线的平衡位形如图 4 所示.

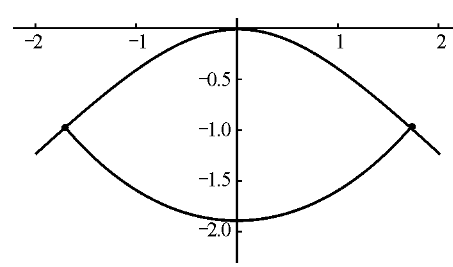

图 4　单支双曲线上自由滑动悬链线的平衡位形

5　总结

我们给出了同高度两端点之间悬链线的参数方程,如果悬链两端还可以在光滑曲线上自由移动,那

建模抓本质 迁移速解题

唐沂国
（平邑第一中学　山东 临沂　273300）

（收稿日期：2019－06－24）

摘　要：模型的建立对高中物理题目的求解至关重要；而学习迁移是指一种学习对另一种学习的影响，也是利用已有的知识经验不断地获得新知识和技能的过程．新知识技能的获得能不断地使已有的知识经验得到扩充和丰富，这就是我们常说的“举一反三”“触类旁通”[1]．我们在求解物理问题时往往是将实际问题进行简化，抽象成一个容易求解的物理题解模型，熟练地运用题解模型可以大幅度提高解题效率．我们将在这篇文章中用求解物理习题的方式，对怎样更好地运用物理题解模型解题，以及知识的迁移，总结规律，提升解题速度做进一步的探究．

关键词：构建模型　学习迁移　速解问题　提升规律

2019 年版考纲变化对我们的启示，在复习解决物理问题时要关注：实际情形 → 物理模型 → 物理规律 → 实际应用，…… 多过程考查分析综合的运用能力；2019 年高考物理通过情境化试题考查考生的物理学科素养．通过分析物理情境构建题解模型，总结物理规律，进行知识迁移来解决实际问题，从而提升解题速度，达到培养学生解题能力的目标．

1　构建物理题解模型

解决物理问题，首先分析物理情境，构建物理题解模型．

【例 1】 物体静止在光滑的水平地面上，受到一个水平向右恒力 F_1 的作用，当速度大小为 v_1 时撤去，立即加上反向的另一个恒力 F_2，作用相同时间后物体回到出发点，速度大小为 v_2，则（　　）

A．$F_1:F_2=1:2$　　B．$F_1:F_2=1:3$

C．$v_1:v_2=1:3$　　D．$v_1:v_2=1:2$

分析：物体先做匀加速运动，后做匀减速运动回到原处，整个过程中的位移为零．结合位移-时间公式得出加速度的关系，再结合速度-时间公式得出速度的关系．

解答：经同样时间 t 后回到原处，整个时间内物体的位移为零，设两运动过程加速度分别为 a_1 和 a_2，有

$$\frac{1}{2}a_1t^2+v_1t-\frac{1}{2}a_2t^2=0$$

又　$v_1=a_1t$

解得　$a_2=3a_1$

因为　$v_2=v_1-a_2t=-2a_1t=-2v_1$

所以　$v_1:v_2=1:2$　　$F_1=ma_1$　　$F_2=ma_2$

又　$a_1=\dfrac{v_1}{t}$　　$a_2=\dfrac{v_2-v_1}{t}$

解得　$F_1:F_2=1:3$

故选项 B 和 D 正确．

点评：解决本题的关键是掌握匀变速直线运动的位移-时间公式和速度-时间公式，并能灵活运用，

么存在 3 个约束方程，分别为总长度不变、端点坐标满足曲线方程、端点处的张力方向与曲线的法向一致．对于具体的直线和双曲线，数值求解这 3 个约束方程，得到了悬链最低点纵坐标、长度参数和端点参数值，从而画出了此时悬链线的平衡位形．如果两个端点在不同的曲线上滑动，那么端点的两个参数是不对称的，本文中的式(1) 和式(2) 需要推广．未知参量是 5 个，最低点的长度参数、最低点的两个坐标、两个端点的参数．约束方程也恰好是 5 个，两个端点坐标满足已知曲线方程、两个端点处链条张力方向与曲线在这点的法向向量一致，以及链条的总长度不变．5 个参数，5 个约束方程，理论上也能数值求解，有兴趣的读者不妨试试．

参考文献

1　姜付锦．悬链线的重心问题[J]．物理教师，2010，31(7)：37

2　郑金．有关悬链线的问题[J]．物理教师，2011，32(6)：59