

折射等光程面与傍轴成像球面之间的关系

邢容 吴良丞

(湖南科技学院理学院物理系 湖南 永州 425199)

(收稿日期:2019-08-11)

摘要:利用费马原理得到了两个齐明点之间折射等光程面的曲面方程,然后得到了折射等光程面顶点(即齐明点连线与折射面的交点)处的曲率半径表达式,它与球面傍轴成像公式具有完全相同的形式.这说明,傍轴成像中的球面与折射等光程面之间存在联系.分析发现,傍轴成像球面实际上就是对顶点处曲率半径等于该球面半径,并在顶点处与该球面相切的一系列折射等光程面的近似.

关键词:费马原理 齐明点 折射等光程面 傍轴成像

1 引言

费马原理是几何光学中关于光传播路径的一条重要原理,由它可以推出直线传播、反射、折射等3条基本定律^[1].早有研究表明,作为几何光学成像理论中的基本公式,球面傍轴成像公式也可从费马原理推得^[2~6].这一类研究中,一般都是在傍轴近似条件下,利用费马原理或者得自于费马原理的等光程性来推导傍轴成像公式的,基本不涉及折射等光程面方面的讨论.

折射等光程面可以对特定位置处的一个物点实现理想成像,而球面(为与一般数学意义上的球面相区别,本文将之称作傍轴成像球面)则可以在傍轴近似条件下对光轴上任意位置处的物点都能做到近似的理想成像.

比较这两种成像情形,折射等光程面的理想成像对物点的位置有要求,但是对物点发射的光束无要求.傍轴成像球面的近似理想成像则与之相反,它对光轴上物点的位置无要求,但是却要求物点发射的光束只能局限于光轴附近区域.

在上述比较之下,自然会出现这样的疑问:折射等光程面与傍轴成像球面之间有无关联?若有,又是怎样的一种关联?对此疑问的回答就是本文获得的一个结果.此外,本文的推导本身也可以视作从费马原理出发获得球面傍轴公式的一种新方法,这是本文获得的另一个结果.

本文首先利用费马原理推得了折射等光程面的方程,然后计算了其顶点处的曲率半径,通过对此曲

率半径表达式的分析,最终得到了折射等光程面与傍轴成像球面间的关系.

2 折射等光程面方程

如图1所示,曲面 Σ 是折射率分别为 n 和 n' ($n' > n$)的两种介质的边界面,若它可以使入射其上的从物点 Q 发出的所有光线在折射后都会聚于像点 Q' 处,那么根据费马原理即可知,所有这些光线走过的光程都必定相同,因此 Σ 面就是一个折射等光程面, Q 与 Q' 则是与之对应的齐明点.本文将齐明点连线称为 Σ 面的光轴,而光轴与 Σ 面的交点就是它的顶点.

为了获得 Σ 面的方程,需要建立一个坐标系.如图1所示,取光轴所在直线为 z 轴,向右的方向为其正方向,再取 Σ 面的顶点为原点 O ,建立三维直角坐标系.图中用来表示 Σ 面的曲线 L 实际上就是 Σ 与 xOz 面的交线.

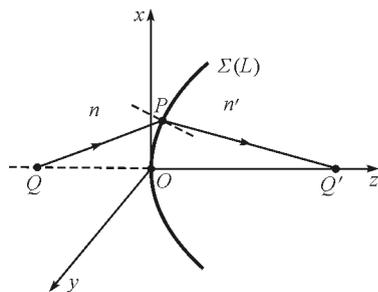


图1 两种介质之间的折射等光程面

任取一条自 Q 发出,并在 Σ 面上某点 P 处折射后到达 Q' 的光线来考虑(如图).设 Q, Q' 与 P 的坐

标分别为 $(0, 0, z_1)$ 、 $(0, 0, z_2)$ 和 (x, y, z) ,则沿着此条光线所走过的光程 L_1 表示为

$$L_1 = n\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2} + n'\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2} \quad (1)$$

再考虑自 Q 点沿 z 轴经原点 O 到达 Q' 点的光线,相应的光程 L_2 表示为

$$L_2 = n'z_2 - nz_1 \quad (2)$$

由 L_1 与 L_2 相等可得

$$n\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2} + n'\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2} = n'z_2 - nz_1 \quad (3)$$

P 点是在 Σ 面上任取的点,因此式(3)就是折射等光程面 Σ 的方程,它描写的是一种被称为笛卡尔卵形面的四次曲面.从方程的表达式可以看出,对于给定的 n 和 n' , z_1 和 z_2 发生任何改变,都会导致 Σ 面随之而变.这表明,一种折射等光程面只对应一对特定位置的齐明点.为了简单又不失一般性,本文只讨论实物成实像情形,并且物点限定于 z 轴负半轴上.

3 折射等光程面在顶点处的曲率半径

由式(3)可以看到, Σ 面是一个以 z 轴为转轴的旋转曲面.因此,只需了解曲线 L 的情况就可以知道 Σ 面的情况了.

自式(3)可得曲线 L 的方程为

$$n\sqrt{x^2 + (z - z_1)^2} + n'\sqrt{x^2 + (z - z_2)^2} = n'z_2 - nz_1 \quad (4)$$

若将式中的 x 视为自变量, z 视为因变量,则图1中曲线 L 在任意点处的曲率半径 r 满足^[7]

$$r = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{|z''|} \quad (5)$$

式中的 z' 和 z'' 分别是 z 对 x 的一阶导函数和二阶导函数.由此式可知, L 在顶点处的曲率半径,也即 Σ 面在其顶点处的曲率半径,应表示为

$$r = \frac{\{1 + [z'(0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|z''(0)|} \quad (6)$$

式中, $z'(0)$ 和 $z''(0)$ 分别是 z' 和 z'' 在顶点处的值.令式(4)等号两边同时对 x 求一阶导数和二阶导数,经整理后可分别得

$$z' = \frac{(nB + n'A)x}{n'(z_2 - z)A + n(z_1 - z)B} \quad (7)$$

$$z'' = \frac{nB + n'A}{n'(z_2 - z)A + n(z_1 - z)B} +$$

$$\frac{\left(n \frac{dB}{dx} + n' \frac{dA}{dx}\right)x}{n'(z_2 - z)A + n(z_1 - z)B} + (nB + n'A)x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{n'(z_2 - z)A + n(z_1 - z)B} \right] \quad (8)$$

两式中

$$A = \sqrt{x^2 + (z_1 - z)^2} \quad (9)$$

$$B = \sqrt{x^2 + (z_2 - z)^2}$$

由式(9),并考虑到 $z_1 < 0, z_2 > 0$ (图1),可以算得原点处 A 与 B 分别满足

$$A = -z_1 \quad B = z_2 \quad (10)$$

再将式(10)以及原点条件 $x = 0$ 和 $z = 0$ 代入到式(7)与式(8)中,注意到式(7)等号右边的分式,以及式(8)等号右边的第二项与第三项都带有因子 x ,所以容易得

$$z'(0) = 0 \quad (11)$$

$$z''(0) = \frac{nz_2 - n'z_1}{z_1 z_2 (n - n')} \quad (12)$$

将式(11)和式(12)代入到式(6)中即可得到 Σ 面在其顶点处的曲率半径为

$$r = \frac{z_1 z_2 (n - n')}{n z_2 - n' z_1} \quad (13)$$

此式可进一步化作

$$\frac{n'}{z_2} - \frac{n}{z_1} = \frac{n' - n}{r}$$

考虑到 z_1 是负的,因此上式又可改写为

$$\frac{n'}{z_2} + \frac{n}{|z_1|} = \frac{n' - n}{r} \quad (14)$$

式(14)与球面傍轴成像公式^[8]具有完全相同的表达形式,但是前者在 Σ 面顶点处精确成立,而后者则是在傍轴近似条件下成立.

4 结果与分析

如前所述,折射等光程面顶点处的曲率半径公式与球面傍轴成像公式有完全相同的表达形式,这表明此两种折射面之间必定存在某种关联.

如图2中所示,作出曲线 L 在顶点处的曲率圆 L' ,然后令 L' 绕 z 轴旋转即可得到球面 Π ,它与 Σ 面有以下关系:与 Σ 面在顶点处相切,半径就等于 Σ 在顶点处的曲率半径.若将两种介质的边界面替换为 Π ,设物点 Q 经 Π 成像于 z' 处,则由球面傍轴成像公式可有

$$\frac{n'}{z'} + \frac{n}{|z_1|} = \frac{n' - n}{r} \quad (15)$$

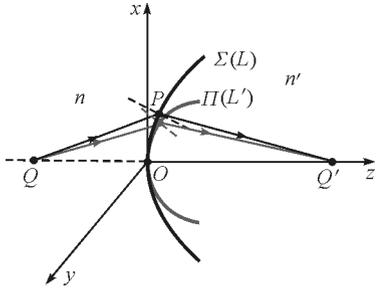


图2 两种介质之间的折射等光程面(Σ)与傍轴成像球面 Π

比较式(15)与式(14)可知, z' 就等于 z_2 。这表明, Q 与 Q' 既是关于 Σ 面的共轭点,同时也是关于 Π 面的共轭点,如图2所示。只是,前者是精确成立的,后者则是在傍轴近似条件下成立。

若将 Q 发出的、满足 Π 面傍轴近似成像条件的所有光线都画出来,它们就会在 Σ 面和 Π 面上分别形成如图3所示的两个区域 σ 和 π (图中放宽了傍轴近似条件,以便观察)。

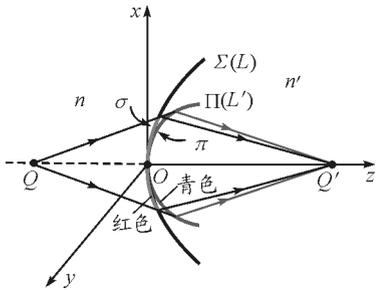


图3 Q 发出的傍轴光束在 Σ 面和 Π 面上形成的区域 σ (红色)和 π (青色)

在图3中, Q 发出的、入射到区域 σ 上的光线,经折射后会完美地会聚于 Q' ,而当这些光线是入射在区域 π 上时,经折射后则会近似地会聚于 Q' 。比较这两种情况可以认为,从成像的角度来说,可将 π 视作 σ 的近似替代物。这样,原来的傍轴光线近似也就转换为折射面形状近似。

总结以上讨论,可有结果:当傍轴成像球面 Π 与折射等光程面 Σ 在顶点处相切,且其半径等于 Σ 在顶点处的曲率半径时,两者就会共有一对共轭点,从而可以用 Π 来近似取代 Σ 。

上述折射面形状近似,并不是只对给定的某一对共轭点成立。改变图3中 Q 点的位置,由式(3)可知, Σ 面的形状也会发生相应的改变。下文的分析表明,在特定条件下,对于任意位置处的物点,从成

像的角度来说,可以用同一个傍轴成像球面来近似取代与这些物点相对应的一系列折射等光程面。

由式(3)可知, Σ 面的形状随 Q 的位置 z_1 变化,但其顶点位置始终位于图2所示坐标系的原点处,不会改变。式(14)则进一步表明,可以给 Σ 面的改变加一个限制性条件,即令 Σ 面在顶点处的曲率半径 r 保持为恒定值。这样,与不同位置处的 Q 点相对应的所有 Σ 面都共有同一个顶点,并且它们在该顶点处的曲率半径也都是相同的。于是,它们与 xOz 面的交线在顶点处也会共有同一个曲率圆,而由此曲率圆绕 z 轴旋转形成的球面 Π 与各 Σ 面必定有以下关系:与所有上述 Σ 面在顶点处相切,半径等于它们在顶点处的曲率半径。因此根据前面总结的讨论结果,此球面 Π 必定与每一个 Σ 面都共有一对共轭点,可以用 Π 来近似取代每一个 Σ 面。

总之,傍轴成像球面可以理解为是对一系列满足特定条件的折射等光程面的近似,此条件就是:所有这些折射等光程面皆在顶点处与该傍轴成像球面相切,且它们在顶点处的曲率半径也都等于该傍轴成像球面的半径。

5 结论

本文首先用费马原理推得了折射等光程面的曲面方程,之后给出了折射等光程面在顶点处的曲率半径表达式,它与球面傍轴成像公式具有完全相同的形式,预示了折射等光程面与傍轴成像球面之间必定存在关联。随后,通过对曲率半径表达式的分析发现,傍轴成像球面实际上是对满足特定条件的一系列折射等光程面的近似。

参考文献

- 1 郑永令.光的反射与折射[J].物理教学,2012,34(06):6~10
- 2 张相武.用费马原理推导透镜的物像公式[J].大学物理,1999,18(01):30~31
- 3 彭湘.用费马原理推导透镜的物像公式[J].大学物理,2002,21(04):20~21
- 4 张相武.再用费马原理推导透镜的物像公式[J].延安大学学报(自然科学版),2004,23(04):31~33
- 5 万建杰,邹佳兵.费马原理在球面界面理想成像中的应用——主轴外物点[J].大学物理,2017,36(06):28~30,35
- 6 万建杰.费马原理在球面界面理想成像中的应用——虚



单摆教学新探

明善文

(西南石油大学理学院 四川 成都 610500)

谢泽坤

(四川南充高中 四川 南充 637000)

(收稿日期:2019-08-25)

摘要:以单摆教学为例,探索如何用自学材料唤醒并优化学生已有知识,如何用学习材料和演示实验引导学生思考问题、发现问题和解决问题,以实现知识和能力同步协调发展.

关键词:自学材料 单摆 激活

学生现有认知经验和教学目标之间的部分是教学设计的着力点,教师通过穿针引线,牵线搭桥,引导并帮助学生达成对知识的理解.在这过程中,虽然不同的教师做法不同,但下面3点常常是优秀教师具有的共同特征.

第一,调动学生的主动性,使学生积极参与到学习活动中来.

第二,唤醒并帮助学生不断优化、拓展已有知识和认知经验,提升学生的思维能力.

第三,为学生提供发现或创新的机会.

如何实现上述三者和谐统一,从而提高教学效率,下面以单摆教学为例来说明.教学过程,以最大摆角 θ_0 的变化为线索,以自学材料和实验为载体,向学生展现物理学上一类重要现象:当某物理量变化到一定程度时,会引起物理规律发生质的飞跃.让学生用科学研究的思维方式学习知识,在获取知识的过程中培养科学素养.

1 优化认知结构 形成知识最近发展区

首先让学生自学下面3段材料,在自学过程中,

像[J].大学物理,2018,37(02):26~28

7 同济大学应用数学系.高等数学(上册)(第5版)[M].北京:高等教育出版社,2002.170,172

8 赵凯华,钟锡华.光学(上册)[M].北京:北京大学出版社,1984.49

The Relationship between Aplanatic Refracting Surfaces and Paraxial Imaging Sphere Surfaces

Xing Rong Wu Liangcheng

(Department of Physics, College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou, Hunan 425199)

Abstract: The equation of aplanatic refracting surfaces is obtained by using Fermat's principle. Then, the expression of curvature radii of aplanatic refracting surfaces at vertices is deduced. The curvature radii expression is identical to the paraxial imaging equation of spherical surfaces. By analysing the curvature radii expression, the conclusion can be drawn that a spherical surface for paraxial imaging is an approximations to all of the aplanatic refracting surfaces which have the curvature radii at vertices equal to the radii of the spherical surface, and are tangent with the spherical surface at vertices.

Key words: Fermat's principle; aplanatic points; aplanatic refracting surfaces; paraxial imaging