均匀带电半球壳轴线上的电场的深入研究及应用

徐远飞
（南京市南化第二中学　江苏 南京　210048）

（收稿日期：2019－08－27）

摘　要：带电球壳是静电场研究中的一个基本模型，在高考乃至物理竞赛中都经常涉及相关问题．半球壳相对于完整的球壳而言，由于球体的不完整，导致了此类问题难度较大，往往需要使用填补法、等效法、对称性分析等技巧来研究，但这样的研究具有特殊性、局部性，将会导致对于均匀带电半球壳轴线上的电场缺乏全面准确的理解．本文将对均匀带电半球壳轴线上的电场进行严密推导，并应用结论对经常出现的相关问题进行解释．

关键词：均匀带电球壳　电场　轴线

1　存在问题

均匀带电半球壳问题可以看作是均匀带电球壳的电场特性的应用，对于一些特殊的位置可以采用填补法、等效法、对称性分析等方法，在理解均匀带电球壳的基础上，利用技巧解决半球壳的问题．

【例 1】已知均匀带电球壳内部电场强度处处为零，电势处处相等．如图 1 所示，正电荷均匀分布在半球面上，Ox 通过半球顶点与球心 O 的轴线．A 和 B 为轴上的点，且 $OA = OB$，C 和 D 为直径上的两点，且 $OC = OD$，则下列判断正确的是（　　）

A．A 点的电势与 B 点的电势相等

B．C 点的电场强度与 D 点的电场强度不相等

C．A 点的电强度与 B 点的电场强度相同

D．在 A 点由静止释放重力不计的带正电的粒子，该粒子将沿 AB 做匀加速直线运动

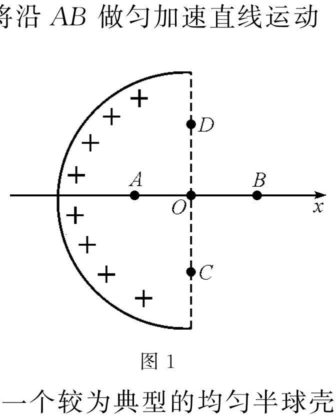


图 1

例 1 是一个较为典型的均匀半球壳轴线上的电场问题．C，D 两点的电势是否相等，可以用对称性来分析．对称性又叫不变性，外尔对此所作的定义是，如果我们对一件东西可以进行操作，使得操作后这件东西仍旧和以前一样，我们就叫这件东西是对称的[1]．按照不变性定义分析，半球壳以 x 轴由 C 周旋转到 D 前后没有发生变化，可见 C 和 D 的位置具有对称性，C，D 点的场强大小相等．

A，B 位置显然对于球壳而言没有对称性，A，B 点的电场强度大小该如何判断，可以使用填补法．将题中半球壳补成一个完整的球壳，且带电均匀，设左、右半球在 A 点产生的场强大小分别为 E_1 和 E_2，根据均匀带电球壳内部电场强度处处为零的特性，可知 $E_1 = E_2$．根据对称性，左、右半球在 B 点产生的场强大小分别为 E_2 和 E_1，且 $E_1 = E_2$．可以得出 A 的场强大小为 E_1，方向向右，B 的场强大小为 E_2，方向向右，所以 A 点的电场强度与 B 点的电场强度相同．

由例 1 可以发现，我们可以通过技巧来解决一些半球壳电场相关问题，方法比较巧妙，但从另外一个角度来看，技巧偏重于解题，但是对于深刻理解均匀带电半球壳轴线上的电场的确切情况提供不了太多帮助，技巧可以解决部分特殊位置的定性判断，但是定性判断的准确性还是有必要从理论研究上得以保证．对于选项 D 的判断，用分析很难得出带电粒子准确的运动情况．

笔者查阅了一些资料[2]，发现有一些文章对于均匀带电半球壳轴线上的电场也进行了深入研究，但得出的结果仍然是限定在特定范围，结论不够完善．

2　均匀带电半球壳轴线上的电场的推导

2.1　均匀带电半球壳轴线上电场计算的基本方法

点电荷组所产生的电场在某点的场强等于各点

电荷单独存在时所产生的电场在该点场强的矢量叠加[3]，计算均匀带电球壳轴线上任意一点的电场强度，基本思路是应用静电场场强叠加原理．均匀带电半球壳具有轴对称性，由此可以推断半球壳的轴线上的电场在 y 轴上的分量相互抵消，场强方向必定沿着 x 轴的方向，如图 2(a) 所示．

设均匀带电半球壳的带电荷量为 q，电荷面密度为 σ，半径为 R，在半球上取微元 $\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}S$ 在微元环 L 上，如图 2(b) 所示，可得出

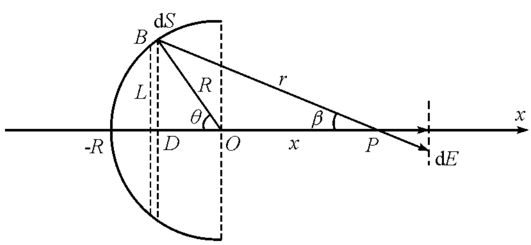
$$\mathrm{d}S=\sin\theta R^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}q=\sigma\sin\theta R^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

根据点电荷电场强度公式可得

$$\mathrm{d}E=k\frac{\mathrm{d}q}{r^2}=$$

$$k\frac{\sigma\sin\theta R^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{r^2}$$



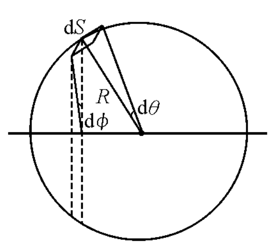


图 2　$x>0$ 时轴线上的场强分析

设 P 点距离 O 点的距离为 x，根据图 2(a) 几何关系可得

$$r^2=(x+R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2=$$

$$x^2+R^2+2xR\cos\theta$$

$$\cos\beta=\frac{x+R\cos\theta}{\sqrt{x^2+R^2+2xR\cos\theta}}$$

微元 $\mathrm{d}S$ 对 P 的场强在 x 轴的分量为

$$\mathrm{d}E_{x_1}=\frac{k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

对 $\mathrm{d}E_x$ 积分可得

$$E_x=\iint_S\frac{k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\int_\theta\frac{2\pi k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

对此积分采用换元积分法，令

$$x^2+R^2+2xR\cos\theta=t^2$$

$$t\in\left[x+R,\sqrt{x^2+R^2}\right]$$

$$E_x=\int_\theta\frac{2\pi k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\pi k\sigma R}{x^2}\int_{x+R}^{\sqrt{x^2+R^2}}\frac{R^2-x^2-t^2}{t^2}\mathrm{d}t$$

球壳电荷量 q 与电荷面密度的关系

$$\sigma=\frac{q}{2\pi R^2}$$

代入上式可得

$$E_x=kq\left(\frac{1}{x^2}-\frac{R}{x^2\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

2.2　均匀带电半球壳轴线上电场分段考虑及特殊点的计算

根据以上推导可得出轴线上离 O 点距离为 x 的点 P 的电场强度大小，分析式(1) 可以看出，场强 $\mathrm{d}E_x$ 的表达式与 $\triangle BPD$ 的几何形状有关系，P 点的位置不同，得出来的 $\mathrm{d}E_x$ 可能不同，积分上下限也有区别，导致积分所得的结果不同，因此要对 P 点的位置讨论，进行分段运算．

(1)$x>0$ 的位置已经推导．

(2)$x=0$ 时，有

$$\mathrm{d}E_{xO}=\frac{k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{k\sigma R^2(R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{R^3}=$$

$$k\sigma\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

积分得　$$E_{xO}=\frac{k\mathrm{q}}{2R^2}$$

(3) 当 $-R<x<0$，如图 3 所示，采用同样的方法可得

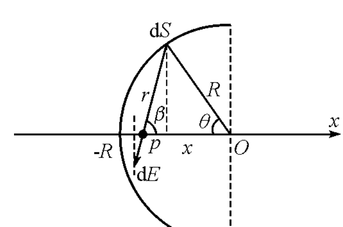


图 3　$-R<x<0$ 时的场强分析图

$$\mathrm{d}E_{x2}=\frac{k\sigma R^2\,[R\cos\theta-(-x)]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{[a^2+R^2-2(-x)R\cos\theta]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=\mathrm{d}E_{x1}$$

由上式可以看出，在$-R<x<0$与$x>0$的位置产生的场强表达形式相同.

(4) 当$x=-R$时，有

$$\mathrm{d}E_{xR}=\frac{k\sigma R^2(\mathrm{x}+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{k\sigma(-1+\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(2-2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

积分得　　$E_{xR}=-\dfrac{k\mathrm{q}}{\sqrt{2}R^2}$

(5) 当$x<-R$时，如图 4 所示，有

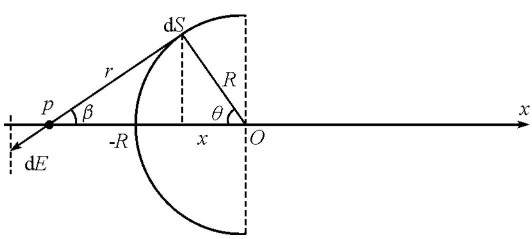


图 4　$x<-R$时的场强分析

$$\mathrm{d}E_{x3}=\frac{k\sigma R^2(-x-R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(a^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_{x3}=-\int_{\theta}\frac{2\pi k\sigma R^2(x+R\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(x^2+R^2+2xR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$-\frac{\pi k\sigma R}{x^2}\int_{-x-R}^{\sqrt{x^2+R^2}}\frac{R^2-x^2-t^2}{t^2}\mathrm{d}t$$

可得　　$E_{x3}=kq\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{R}{x^2\sqrt{x^2+R^2}}\right)$

设沿着x轴的方向为正

$$E_{x3}=-kq\left(\frac{1}{x^2}+\frac{R}{x^2\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

综上得出均匀带电半球壳轴线上的电场强度为

$$E_x=\begin{cases}-kq\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{R}{x^2\sqrt{x^2+R^2}}\right) & x<-R\\ -\dfrac{kq}{\sqrt{2}R^2} & x=-R\\ kq\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{R}{x^2\sqrt{x^2+R^2}}\right) & x>-R\text{ 且 }x\neq 0\\ \dfrac{kq}{2R^2} & x=0\end{cases}$$

用 Geogebra 软件生成函数图像，如图 5 所示，可以直观地了解轴线上场强的分布情况.

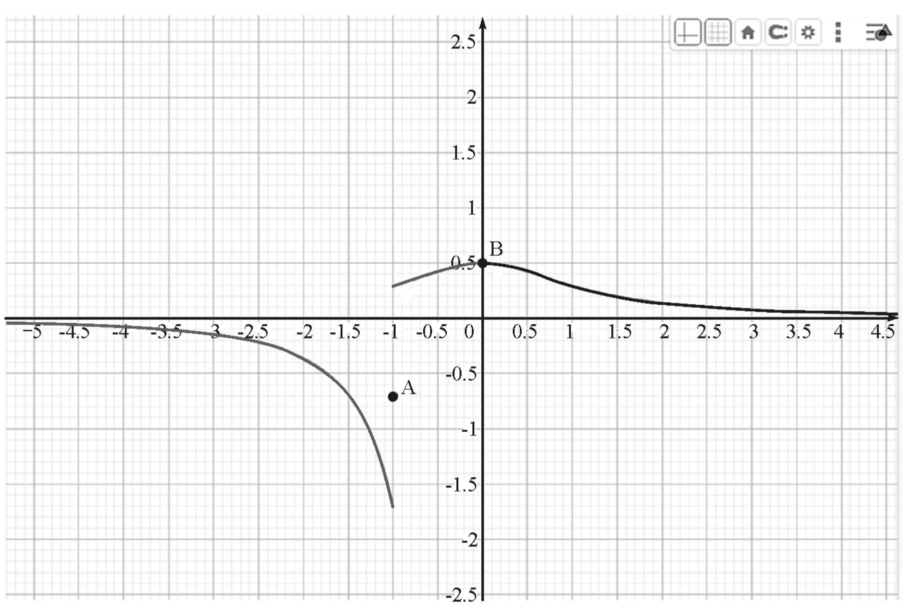


图 5　用 Geogebra 软件生成的场强分布图像

3　均匀带电半球壳轴线上电场分布的总结及应用

通过计算可以发现，均匀带电半球壳轴线上的电场是比较复杂的，但是可以总结出一些结论：

(1) 以x轴方向为正，可以发现在$x>-R$的范围内，电场强度的方向都为正，在$x<-R$的范围，电场方向为负.

(2) 球心处的电场有简洁的表达形式$E_{xO}=\dfrac{kq}{2R^2}$，方向沿x轴正方向.

(3) 在$-R<x<R$的范围内，场强大小局部以y轴对称.

（4）电场强度在 A 点的（$x=-R$）位置出现突变，电场强度方向沿 x 轴负方向，大小

$$E_{xR}=-\frac{kq}{\sqrt{2}R^2}$$

将以上得到的结论应用到实际的习题中，可以有效地解决相关问题. 如例 1 中选项 A，利用（1）可知 $x>-R$ 的范围内，电场强度的方向都为正，沿着电场线的方向电势降低，选项 A 错误. 选项 D 根据 Geogebra 生成的函数图像，可直观的判断出粒子将做变加速运动，例题 1 答案为选项 C.

【例 2】均匀带电球壳在球外空间产生的电场等效于电荷集中于球心处产生的电场. 如图 6 所示，在半球面 AB 上均匀分布正电荷，总电荷量为 q，球面半径为 R，CD 为通过半球顶点与球心 O 的轴线，在轴线上有 M，N 两点，$OM=ON=2R$，已知 M 点的电场强度为 E，则 N 点的场强为（　　）

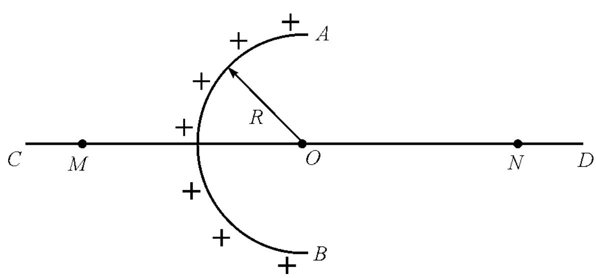


图 6　例 2 题图

A. $\dfrac{kq}{2R^2}-E$　　B. $\dfrac{kq}{4R^2}$

C. $\dfrac{kq}{2R^2}-E$　　D. $\dfrac{kq}{4R^2}+E$

解析：

方法一：若将带电荷量为 $2q$ 的完整球面放在 O 处，均匀带电球壳在球外空间产生的电场等效于电荷集中于球心处产生的电场. 则在 M，N 点所产生的场强为 $E_{合}=\dfrac{k2q}{(2R)^2}$，当半球面在 M 点产生的场强为 E，右半球在 M 点的场强

$$E_{右}=\frac{k2q}{(2R)^2}-E=\frac{kq}{2R^2}-E$$

根据对称性可知左半球对 N 点的场强大小等于右半球对 M 点的场强，此题选项 A 正确.

方法二：将 $x=-2R$ 和 $x=2R$ 的情况分别代入推导出的公式进行计算

$$E_M=-kq\left[\frac{1}{(2R)^2}+\frac{R}{(2R)^2\sqrt{(2R)^2+R^2}}\right]=-\frac{kq}{R^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$$

负号表示方向. 根据题意可知

$$E=\frac{kq}{R^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$$

$$E_N=kq\left[\frac{1}{(2R)^2}-\frac{R}{(2R)^2\sqrt{(2R)^2+R^2}}\right]=\frac{kq}{R^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)=\frac{kq}{R^2}\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)\right]=\frac{kq}{2R^2}-E$$

【例 3】（竞赛）如图 7 所示，半径为 R 的均匀带电球面，电荷的面密度为 σ，试求球心处的电场强度.

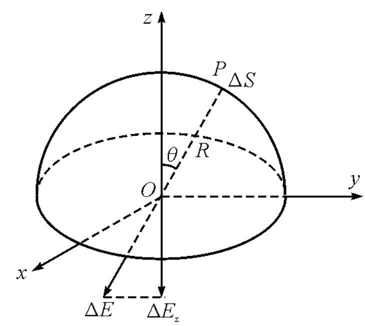


图 7　例 3 题图

方法一：面元 $\triangle S$ 在 O 点产生的电场在 z 轴的分量为

$$E_O=\frac{k\sigma\Delta S\cos\theta}{R^2}$$

式中 $\Delta S\cos\theta$ 为面元在 xOy 平面的投影，由此可得

$$E_O=\frac{k\sigma\pi R^2}{R^2}=k\sigma\pi=\frac{kq}{2R^2}$$

方法二：应用场强叠加原理直接积分得

$$E_O=\frac{kq}{2R^2}$$

4　结束语

通过对均匀带电半球壳的轴线上电场的深入研究，对轴线上的电场分布情况的理解更加全面，而不是停留在基于技巧的对特殊位置的片面理解，对相关问题的解释、教学、命题都有所帮助.

参考文献

1　程守洙，江永之. 普通物理学[M]. 北京：高等教育出版社，2016.5

2　何海卫，欧阳奕成. 对“均匀带电半球壳电场”问题的深度分析[J]. 物理教学，2018(4)

3　赵凯华，罗蔚茵. 新概念物理教程 力学[M]. 北京：高等教育出版社，2004.7