

大学物理实验中测量不确定度的分析研究*

冯明春 王玉杰

(滁州学院机械与电气工程学院 安徽 滁州 239000)

(收稿日期:2019-08-31)

摘要:在大学物理实验中,测量不确定度是实验分析的一个重要内容.根据不确定度的分析过程,再结合具体的实验数据,分别对大学物理实验中弹性模量、液体表面张力系数和平凸透镜的曲率半径这3个具有代表性实验的不确定度进行了分析讨论.通过本文的分析,可以为大学物理实验教学和学生学习实验数据提供一个参考,同时能够锻炼学生处理实验数据的能力,也有助于培养学生的意志品质.

关键词:大学物理 实验分析 不确定度

测量不确定度是指测量结果变化的不肯定,是表征被测量的真值在某个量值范围的一个估计,是测量结果含有的一个参数,用以表示被测量值的分散性^[1,2].测量不确定度的定义表明,一个完整的测量结果应包含被测量值的估计与分散性参数两部分.例如,被测量 Y 的测量结果为 $y \pm u$,其中 y 是被测量值的估计, u 为被测量的不确定度.文献[3~5]着重分析了不确定度的一些理论;而本文在不确定度理论上再结合具体实验数据,分别对力学、热学和光学实验中所对应的弹性模量、液体表面张力系数和牛顿环实验中平凸透镜的曲率半径这3个实验测量结果的不确定度进行了分析讨论,这有助于教师实验教学和学生学习实验数据,使得研究更有意义.

1 分析过程

根据测量不确定度的定义,在测量实践中如何对测量不确定度进行合理的评定,这是必须解决的基本问题.对于一个实际测量过程,测量不确定度的来源有多个,这些不同来源的不确定度在计算方法上只有两类,一类称为A类分量,它是用统计学方法计算的分量,是随机误差性质的不确定度;另一类

称为B类分量,是用非统计方法评定的分量,是系统误差性质的不确定度^[6].计算不确定度,常用计算标准差去表示,称为标准不确定度.

1.1 直接测量值的标准不确定度的A类分量 $u_A(x)$

测量 x 的平均值 \bar{x} 的实验标准差

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

取 x 的标准不确定度的A类分量为

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (1)$$

1.2 直接测量值的标准不确定度的B类分量 $u_B(x)$

设 x 误差的某一项的误差限为 Δ ,其标准差

$$s = \frac{\Delta}{k}$$

则标准不确定度的B类分量

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{k} \quad (2)$$

式(2)中, k 称为包含因子, k 值与 x 的分布有关,其常用分布及其 k 值如表1所示.

* 国家自然科学基金,项目编号:11605019;滁州学院博士科研启动基金项目,项目编号:2016qd06;滁州学院教学研究项目,项目编号:2018jyc026;滁州学院横向研究项目,项目编号:HX2018143

作者简介:冯明春(1980-),男,博士,讲师,研究方向为大学物理教学及大学物理实验.

表1 常用分布及其 k

分布类型	概率 $P/\%$	k
正态分布	50	0.675
	90	1.645
	95	1.96
	99	2.576
	99.73	3
均匀分布	100	$\sqrt{3}$
三角	100	$\sqrt{6}$
反正弦	100	$\sqrt{2}$

1.3 合成标准不确定度 $u_c(x)$ 或 $u_c(y)$

对某一物理量测量之后,要计算测量值的不确定度,由于其测量值的不确定度来源不止一个,所以要合成其标准不确定度.

对于直接测量,设被测量 X 的标准不确定度的来源有 m 项,则合成标准不确定度 $u_c(x)$ 为

$$u_c(x) = \sqrt{\sum u^2(x_i)} \quad (3)$$

式(3)中的 $u(x)$ 可以是 A 类评定或 B 类评定.

对于间接测量,设被测量 Y 由 n 个不相关的直接被测量 x_1, x_2, \dots, x_n 算出,它们的关系为 $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$,各 x_i 的标准不确定度为 $u(x_i)$,则 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为

$$u_c(y) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad (4)$$

式(4)中的偏导数 $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ 为灵敏系数.

1.4 不确定度的报告

$$Y = y \pm u_c(y) \quad (5)$$

式(5)就是被测量的不确定度的表现形式.

2 实验分析

2.1 弹性模量的标准不确定度

金属丝弹性模量 E 的表达式为^[6]

$$E = \frac{4Fl}{\pi d^2 \delta} \quad (6)$$

在式(6)中, F 为外力, l 为金属丝的长度, d 为金属丝的直径,这 3 个物理量都易测量;由于金属丝的伸长量 δ 太小,不容易测量,所以在计算金属丝的

弹性模量时,关键是如何解决测量金属丝伸长量 δ 的问题.那么,在实际实验中,巧妙地利用了光杠杆装置来测量伸长量 δ ^[6],实验装置如图 1 所示.

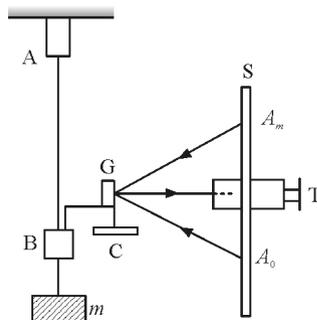


图1 弹性模量实验图

在图 1 中,光杠杆 G 前足尖到两后足尖连线的垂直距离为 d_1 ,光杠杆平面镜到直尺 S 的距离为 d_2 ,加砝码 m 前后望远镜中直尺的读数为 A_0 和 A_m ,根据几何关系得到金属丝伸长量 δ 为

$$\delta = \frac{|A_m - A_0| d_1}{2 d_2} \quad (7)$$

根据式(6)、式(7)以及 $F = mg$,得到伸长法测金属丝弹性模量 E 的公式为

$$E = \frac{8mgl d_2}{\pi d_2 (A_m - A_0) d_1} \quad (8)$$

再设 $K = \frac{(A_m - A_0)}{m}$,则 K 为砝码质量改变一个单位时,望远镜中所见尺的读数的变化量,则式(8)改为

$$E = \frac{8gl d_2}{\pi d_2 K d_1} \quad (9)$$

根据式(9),可以推导出弹性模量 E 的标准不确定度 $u(E)$ 为

$$u(E) = E \left[\left(\frac{u(l)}{l} \right)^2 + \left(\frac{u(d_1)}{d_1} \right)^2 + \left(\frac{u(d_2)}{d_2} \right)^2 + \left(2 \frac{u(d)}{d} \right)^2 + \left(\frac{u(K)}{K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

在此实验中测量的实验数据,如表 2 所示.

在表 2 中一个砝码质量 $m = 360 \text{ g}$,根据表 2 数据采用 3 种方法来计算 K .

(1) 由逐差法计算求得

$$K = \frac{(A_7 + A_6 + A_5 + A_4) - (A_3 + A_2 + A_1 + A_0)}{16m} =$$

$$2.66 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

表2 弹性模量实验数据

砝码	A/cm	增荷	减荷	增荷	减荷	$A(\text{平均值})/\text{cm}$
0	A_0	5.20	5.12	5.12	5.10	5.135
m	A_1	5.30	5.22	5.21	5.21	5.235
$2m$	A_2	5.40	5.35	5.32	5.31	5.345
$3m$	A_3	5.48	5.45	5.42	5.42	5.442 5
$4m$	A_4	5.60	5.58	5.52	5.53	5.557 5
$5m$	A_5	5.62	5.61	5.61	5.62	5.615
$6m$	A_6	5.72	5.72	5.71	5.70	5.712 5
$7m$	A_7	5.81	5.81	5.80	5.80	5.805

(2) 由图像法拟合求得

根据表2实验数据绘制图2.

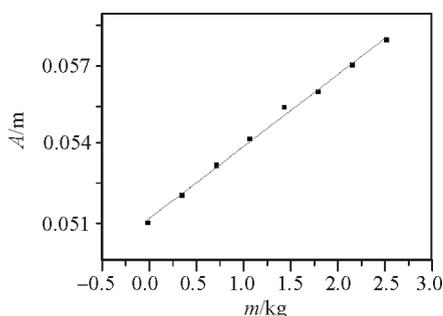


图2 图像拟合法

$$K = 2.65 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(3) 由最小二乘法求得

令 $x_i = m_i, y_i = A_i$ 进行直线拟合 ($y = a + bx$),

此 b 值就是 K , 其中

$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i$	$\sum y_i^2$	$\sum x_i y_i$
10.08	18.144	0.438 48	0.024 07	0.566 89

则令

$$s_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{8} = 5.443 2 \text{ kg}^2$$

$$s_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{8} = 0.014 405 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

计算得到

$$K = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = 2.646 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

可以看出, 3种方法求得的 K 误差不大, 再结合其他实验数据 l 为 38.52 cm, d_1 为 9.800 cm, d_2 为 161.50 cm, d 为 0.642 mm, 根据式(9)求得 E 为

$$E = \frac{8gl d_2}{\pi d_2 K d_1} = 14.46 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

由测量仪器的误差限可知

$$u(l) = \frac{0.5 \text{ mm}}{\sqrt{3}} \quad u(d_1) = \frac{0.02 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(d_2) = \frac{0.5 \text{ mm}}{\sqrt{3}} \quad u(d) = \frac{0.01 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(K) = \frac{u(A)}{16m} = \frac{0.5 \text{ mm}}{\sqrt{3}} \frac{1}{16m}$$

采用的都是均匀分布的B类分量, 根据式(10), 计算得到 E 的标准不确定度

$$u(E) = 0.770 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

那么, 金属丝的弹性模量 E 的标准不确定度报告为

$$E \pm u(E) = (14.46 \pm 0.77) \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

2.2 液体表面张力系数的标准不确定度

实验装置如图3所示.

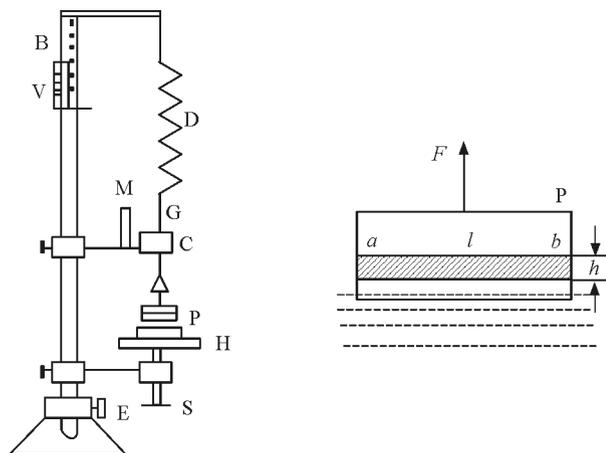


图3 实验示意图

在实验中金属框 P 中间拉一金属细丝 ab , 将框及细丝浸入水中后慢慢地将其拉出水面, 在细丝下面将带起一水膜, 当水膜即将破裂时, 则有

$$F = W + 2\gamma l + ldh\rho g \quad (11)$$

在式(11)中, F 为向上的拉力, W 为框所受重力和浮力之差, l 为细金属丝的长度, d 为金属丝的直径即水膜的厚度, h 为水膜被拉断前的高度, ρ 为水的密度, g 为重力加速度. $ldh\rho g$ 为水膜的重量, 因

表 3 液体表面张力系数实验数据

测量次数	1	2	3	测量次数	1	2	3
s_1 / mm	13.00	13.76	13.16	L_0 / mm	19.7	19.5	18.1
s_2 / mm	16.08	16.74	16.42	L_1 / mm	14.8	14.4	13.1
l / mm	42.66	42.64	42.68	d / mm	0.318	0.317	0.319

在表 3 中, s_1 为金属丝刚好到水面时的位置, s_2 为水膜刚好破裂时的位置, L_0 为水膜刚好破裂时 B 柱上的位置, L_1 为当转动 E 使金属框缓慢下降到 G 回到零点(G 的横线、横线的像和镜面标线重合位置)时 B 柱上的位置, 可知水膜高度

$$h = |s_2 - s_1|$$

$$F - W = kL = k|L_1 - L_0|$$

根据表 3 数据, 再代入式(12) 可求得水的表面张力系数为

$$\gamma = \frac{(F - W) - ldh\rho g}{2l} = \frac{kL - ldh\rho g}{2l} =$$

$$51.99 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

由测量仪器的误差限可知

$$u(L) = \frac{0.1 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(l) = \frac{0.02 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(h) = \frac{0.02 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

$$u(d) = \frac{0.01 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$$

采用的也都是均匀分布的 B 类分量, 由式(12)

可知, γ 的标准不确定度为

$$u(\gamma) = \left[\left(\frac{k}{2l} \right)^2 u^2(L) + \left(\frac{kL}{2l^2} \right)^2 u^2(l) + \right.$$

为张力大小与长度成正比, 同时水膜有前后两面, 所以式(11) 中张力为 $2\gamma l$. 从式(11) 可得水的表面张力系数表达式为

$$\gamma = \frac{(F - W) - ldh\rho g}{2l} \quad (12)$$

在此实验中, 约利秤的劲度系数 k 为 $0.97 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 测量液体表面张力系数的其他实验数据如表 3 所示.

$$\left[\left(\frac{h\rho g}{2} \right)^2 u^2(d) + \left(\frac{d\rho g}{2} \right)^2 u^2(h) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

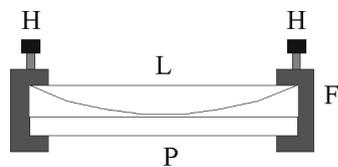
$$0.66 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

那么, 水表面张力系数的标准不确定度报告为

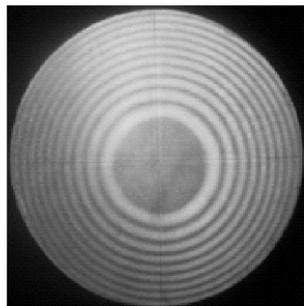
$$\gamma \pm u(\gamma) = (51.99 \pm 0.66) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

2.3 曲率半径的标准不确定度

牛顿环仪是由平凸透镜 L 和磨光的平玻璃板 P 叠合安装在金属框架 F 中构成的, 如图 4 所示; 测量的实验数据^[7], 如表 4 所示.



(a) 实验装置



(b) 牛顿环干涉图样

图 4 牛顿环装置及干涉图样示意图

表4 牛顿环实验测量数据

环数 $k+m$	读数/mm		直径 D_{k+m}/mm	环数 k	读数/mm		直径 D_k/mm	$\Delta_i =$ $D_{k+m}^2 - D_k^2 / \text{mm}^2$
	右	左			右	左		
22	16.501	23.742	7.241	12	17.294	22.952	5.658	20.419
21	16.568	23.68	7.112	11	17.382	22.858	5.476	20.594
20	16.644	23.600	6.956	10	17.489	22.760	5.271	20.603
19	16.715	23.528	6.813	9	17.592	22.656	5.064	20.773
18	16.797	23.461	6.664	8	17.701	22.56	4.859	20.799
17	16.870	23.372	6.502	7	17.804	22.449	4.645	20.700
16	16.950	23.293	6.343	6	17.910	22.332	4.422	20.680
15	17.041	23.205	6.164	5	18.038	22.208	4.17	20.606
14	17.124	23.123	5.999	4	18.164	22.085	3.921	20.614
13	17.201	23.042	5.841	3	18.308	21.937	3.629	20.948

根据表4中数据,可以得出

$$\Delta = \bar{\Delta}_i = \overline{D_{k+m}^2 - D_k^2} = 20.674 \text{ mm}^2$$

其中,环数差 $m=10$,波长 $\lambda=589.3 \text{ nm}$,根据曲率半径公式

$$R = \frac{D_{k+m}^2 - D_k^2}{4m\lambda}$$

计算得到 R 为 877.1 mm 。

下面计算曲率半径 R 的标准不确定度 $u(R)$

Δ 的 A 类分量为

$$u_A(\Delta) = s(\bar{\Delta}) = \sqrt{\frac{\sum (\Delta_i - \bar{\Delta}_i)^2}{10(10-1)}} = 0.045 \text{ mm}^2$$

Δ 的 B 类分量为

$$u_B(\Delta) = 2\sqrt{(\bar{D}_{k+m})^2 + (\bar{D}_k)^2} \frac{\Delta_{\text{ins}}}{\sqrt{3}} = 0.100 \text{ mm}^2$$

其中 $\Delta_{\text{ins}}=0.01 \text{ mm}$ 为移测显微镜的最小分度值。

合成后

$$u_c(\Delta) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0.110 \text{ mm}^2$$

同时,由于视觉疲劳所造成的环数误差 $u(m)$,不妨假设 $u(m)=0.1$;再结合 $u(\lambda)=0.30 \text{ nm}$ (钠双黄线波长 $\lambda_1=589.0 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2=589.6 \text{ nm}$ 导致),可得合成标准不确定度为

$$u(R) =$$

$$R \sqrt{\left[\frac{u_c(\Delta)}{\Delta}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right]^2} = 9.9 \text{ mm}$$

测量结果为

$$R \pm u(R) = (877.1 \pm 9.9) \text{ mm}$$

而厂家提供的凸透镜曲率半径标准值为

$$A_R = 855.1 \text{ mm}$$

根据测量结果

$$R = 877.1 \text{ mm}$$

与其标准值

$$A_R = 855.1 \text{ mm}$$

可知,两者之差不超过其标准不确定度 $u(R)=9.9 \text{ mm}$ 的 3 倍^[6],即

$$|R - A_R| \leq 3u(R)$$

则可以认为测量结果和标准值在测量误差范围内是一致的。

3 分析和讨论

金属丝弹性模量 E 的不确定度表达式

$$u(E) = E \left[\left(\frac{u(l)}{l} \right)^2 + \left(\frac{u(d_1)}{d_1} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left(\frac{u(d_2)}{d_2} \right)^2 + \left(2 \frac{u(d)}{d} \right)^2 + \left(\frac{u(K)}{K} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中有 5 个因子,其中占主要作用的是后面两个

$\left(2 \frac{u(d)}{d} \right)^2$ 和 $\left(\frac{u(K)}{K} \right)^2$ 因子。虽然定义

$$K = \frac{(A_m - A_0)}{m}$$

但用逐差法求解

$$K = \frac{(A_7 + A_6 + A_5 + A_4) - (A_3 + A_2 + A_1 + A_0)}{16m}$$

时,分母体现出来的是 $16m$,所以计算时

$$u(K) = \frac{u(A)}{16m}$$

而不是

$$u(K) = \frac{u(A)}{m}$$

在测量水的表面张力系数实验时,约利秤的劲度系数 k 的测量是很关键的,因为在表达式 $\gamma = \frac{kL - ldh\rho g}{2l}$ 中金属丝的直径 d 很小,所以水膜重量 $ldh\rho g$ 这一项不大.同时,表面张力系数 γ 的标准不确定度 $u(\gamma)$ 中起到主要作用的是 $\left(\frac{k}{2l}\right)^2 u^2(L)$ 因子,其他的 $\left(\frac{kL}{2l^2}\right)^2 u^2(l)$, $\left(\frac{h\rho g}{2}\right)^2 u^2(d)$ 和 $\left(\frac{d\rho g}{2}\right)^2 u^2(h)$ 这3个因子与 $\left(\frac{k}{2l}\right)^2 u^2(L)$ 因子相比,几乎可以忽略不计.

在计算牛顿环实验曲率半径 R 的标准不确定度 $u(R)$ 时,还考虑了环数误差 $u(m)$ 在 $u(R)$ 所带来的影响因子 $\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2$; 如果不考虑这一因子,就有可能得不到 $|R - A_R| \leq 3u(R)$ 这个结论,那么需要重新分析该实验的问题所在.

4 结论

在分析金属丝弹性模量 E 的标准不确定度 $u(E)$ 和液体表面张力系数 γ 的标准不确定度 $u(\gamma)$ 时,仅仅分析计算了 B 类标准不确定度作为总的标准不确定度,略去 A 类标准不确定度,主要是 B 类分量起主要作用;在分析曲率半径 R 的标准不确定度 $u(R)$ 时,同时考虑了 A 类不确定度和 B 类标准不确定度;对于随机误差为主的测量情况,可以忽略 B 类标准不确定度,只分析计算 A 类标准不确定度作为总的标准不确定度.

参考文献

- 1 费业泰. 误差理论与数据处理(第5版)[M]. 北京:机械工业出版社,2006
- 2 吴石林,张玘. 误差分析与数据处理[M]. 北京:清华大学出版社,2010
- 3 刘才明. 大学物理实验中测量不确定度的评定与表示[J]. 大学物理,1997,16(8):21~23
- 4 李春贵. 大学物理实验中 A 类不确定度探究[J]. 大学物理,2012,31(1):35~38
- 5 李秀玲,阴瑞华. 误差理论中的几类疑难问题[J]. 河北师范大学学报(自然科学版),2002,26(3):266~268
- 6 杨述武,孙迎春,等. 普通物理实验(力学、热学部分)(第5版)[M]. 北京:高等教育出版社,2015
- 7 冯春明,王玉杰. 牛顿环实验的 MATLAB 仿真及分析研究[J]. 大学物理实验,2019,32(5):74~78

Analysis and Research on Uncertainty of Measurement in University Physics Experiment

Feng Mingchun Wang Yujie

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Chuzhou University, Chuzhou, Anhui 239000)

Abstract: The uncertainty is an important part of experiment analysis in the college physics experiments. According to the process of uncertainty analysis, and combined with specific experimental data, three representative uncertainties, namely elasticity modulus, liquid surface tension coefficient and curvature radius, are analyzed and discussed respectively. By the analysis of this paper, it can provide a reference for college physics experiment teaching and experiment data process for students. At the same time, it can exercise students' ability to process experimental data and also help cultivate students' volitional quality.

Key words: college physics; experiment analysis; uncertainty