

对一个运动斜面上摩擦力问题解法的探讨

郑 金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2019-10-05)

摘 要:应用牛顿运动定律对一个有关斜面体小车上的物体在摩擦力作用下随小车一起做简谐运动问题的错误解法进行辨析,并给出正确的解答方法.

关键词:弹簧振子 斜面体 摩擦力 临界加速度

当斜面体在水平面上固定不动时,位于斜面上的物体在摩擦力的作用下可处于相对静止状态,而当斜面体沿水平方向加速运动时,位于斜面上的物体可能相对于斜面发生滑动或分离,这取决于斜面体运动加速度的大小和方向.但要注意刚好发生相对滑动的临界条件与刚好发生分离的临界条件是不同的,或者说,刚好相对滑动时不可能分离,而刚好分离时必将发生相对运动,刚好不分离的状态与刚好不滑动的状态完全不同,因此要注意这两种临界状态的区别,否则在解题时将会导致错误的结果.下面以《物理通报》2012年第3期第48面一道典型的动力学问题^[1]为例进行分析.

【原题】如图1所示,劲度系数为 κ 的轻质弹簧一端与墙固定,另一端与倾角为 θ 的斜面体小车连接.小车置于光滑水平面上,在小车上叠放一个物体.已知小车质量为 M ,物体质量为 m .当小车的左边缘位于 O 点时,整个系统处于平衡状态.现将小车从 O 点拉到 B 点,令 $OB=b$,无初速释放后,小车在水平面的 B 和 C 两点间来回运动,物体和小车之间始终没有相对运动.求: b 的大小必须满足什么条件,才能使小车和物体一起运动过程中,在某一位置时,物体和小车之间的摩擦力为零.

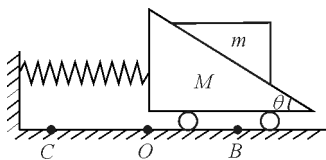


图1 题图

原解:当物体和小车之间的摩擦力为零时,取物体 m 为研究对象,有

$$mg \tan \theta = ma$$

取小车和物体组成的系统为研究对象,有

$$\kappa b = (M + m)a$$

以上两式联立可得

$$b = \frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa}$$

为了使小车和物体在一起运动的过程中经过某一位置时二者之间的摩擦力为零,需小车在开始释放时到平衡位置的距离是一个范围,即

$$b > \frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa}$$

但 b 取值不能足够大,要想使物体和小车始终相对静止, b 的最大值应是小车在 B 点时物体受到的支持力为零时取得,这时取物体为研究对象,有

$$\frac{mg}{\tan \theta} = ma$$

取小车、物体和弹簧组成的系统为研究对象,有

$$\kappa b = (M + m)a$$

以上两式联立可得

$$b = \frac{(M + m)g}{\kappa \tan \theta}$$

所以 b 的取值范围是

$$\frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa} < b < \frac{(M + m)g}{\kappa \tan \theta}$$

要想使这个答案有意义,还必须满足 θ 小于 45° ,才能使小车在 O 点左侧 $b = \frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa}$ 时,物体和小车之间的摩擦力为零;如果 θ 大于 45° ,则不可能存在这一位置,使得物体和小车之间的摩擦力为零.

探讨:对于上述解答过程,存在3方面不妥之处,值得商榷.其一,在推导 $b = \frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa}$ 时,

没有明确指出小车需在平衡位置 O 的左侧运动, 因为如果小车从平衡位置 O 的右侧向平衡位置运动, 则加速度方向向左, 那么物体受到的合外力方向向左, 由于支持力斜向右, 所以摩擦力必然斜向左, 而不可能为零, 因此不存在摩擦力为零的情况, 这与题意不符; 其二, 推导出的弹簧形变量的最大值 $b = \frac{(M+m)g}{\kappa \tan \theta}$ 是错误的, 因为该值是小车在 B 点时物体与小车刚好不分离时的临界条件, 但在该条件下物体与小车不可能保持相对静止, 或者说二者在水平方向的加速度不可能相同, 因为此时小车的加速度最大, 若物体受到的支持力为零, 则摩擦力为零, 那么在水平方向的加速度为零, 必将发生相对运动, 这与题意“物体与小车之间始终没有相对运动”不相符; 其三, 在动摩擦因数小于 1 的情况下, 斜面倾角的最大值并非 45° , 而是 22.5° . 对该题正确的解法是分别讨论小车在平衡位置两侧 C 和 B 两点时位于斜面上的物体都不发生滑动的条件.

1 小车在平衡位置左侧与物体相对静止

当小车在平衡位置左侧刚释放时, 加速度方向水平向右, 可知当加速度较小时, 物体有沿斜面向下滑的趋势; 当加速度较大时, 物体有沿斜面向上滑的趋势. 物体刚好不滑动的临界条件是受到的摩擦力刚好达到最大静摩擦力, 为了使小车在 C 点刚释放时物体与小车保持相对静止, 初始加速度应存在一个取值范围, 即在最小值和最大值之间, 因此 C 点在弹簧振子的平衡位置左侧存在两个极端位置, 则形变量 b 对应两个极值, 下面分别推导加速度的最小值和最大值及其对应 C 点的位置.

其一, 当小车刚释放时的加速度取最小值时, 物体有沿斜面向下滑的趋势, 则受到的摩擦力沿斜面向上, 设此时静摩擦力刚好达到最大值, 则在垂直于斜面方向由牛顿第二定律有

$$N - mg \cos \theta = ma \sin \theta$$

在平行于斜面方向由牛顿第二定律有

$$mg \sin \theta - \mu N = ma \cos \theta$$

联立方程可得小车刚释放时加速度的最小值为

$$a_{\min} = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} g$$

与方程 $\kappa b = (M+m)a$ 联立可得

$$b_{\min} = \frac{M+m}{\kappa} a_{\min}$$

由题意可知在简谐运动的过程中物体与小车始终保持相对静止, 那么当小车运动到平衡位置时, 即加速度为零时, 二者仍然保持相对静止, 则动摩擦因数至少为 $\mu = \tan \theta$, 即 $\mu \geq \tan \theta$. 而另一方面, 由

$$a_{\min} = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} g > 0$$

可得

$$\mu < \tan \theta$$

这与 $\mu \geq \tan \theta$ 发生矛盾, 因此在 $\mu > \tan \theta$ 的条件下, a_{\min} 不存在, 即在小车向右加速运动的过程中不会出现物体刚好沿斜面向下滑的情况. 或者说, 在简谐运动的过程中, 如果物体与小车始终保持相对静止, 那么当小车运动到平衡位置时, 即加速度为零时物体不下滑, 因此, 在小车从平衡位置左侧向右加速运动或从平衡位置向左减速运动的过程中, 即在超重状态下物体不可能沿斜面向下滑, 只需 $b > 0$ 即可.

其二, 当小车刚释放时的加速度取最大值时, 物体有沿斜面向上滑的趋势且刚好不滑动, 那么受到最大静摩擦力的方向沿斜面向下. 应用牛顿第二定律列方程, 在平行于斜面方向有

$$mg \sin \theta + \mu N = ma \cos \theta$$

在垂直于斜面方向有

$$N - mg \cos \theta = ma \sin \theta$$

联立方程可得小车刚释放时加速度的最大值为

$$a_{\max} = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} g$$

可知

$$b_{\max} = \frac{M+m}{\kappa} a_{\max}$$

此时物体刚好不滑动, 若在运动过程中始终相对静止, 则应 $b < b_{\max}$. 由 $a_{\max} > 0$, 可得 $\mu < \frac{1}{\tan \theta}$, 与 $\mu \geq \tan \theta$ 联立可知, $\tan^2 \theta < 1$, 则 $\theta < 45^\circ$.

综上所述, 当小车位于平衡位置左侧时, 为了使物体始终不发生相对滑动, b 的取值范围应是 $0 < b < b_{\max}$, 而且 $\mu \geq \tan \theta, \theta < 45^\circ$.

下面推导物体受到的摩擦力刚好为零时的加速度的临界值及其对应 C_1 点的位置.

在小车从平衡位置左侧向右运动的过程中, 由于加速度逐渐减小, 物体受到摩擦力的方向将发生改变, 因此存在摩擦力为零的情况. 当物体受到的摩擦力刚好为零时, 在水平方向由牛顿第二定律有

$$mg \tan \theta = ma_0$$

可得临界加速度为

$$a_0 = g \tan \theta$$

对于 a_0 还有一种求解方法,当摩擦力刚好为零时,即使斜面光滑,物体也不发生滑动,那么把 $\mu = 0$ 代入

$$a_{\max} = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} g$$

可得

$$a_0 = g \tan \theta$$

由

$$\kappa b = (M + m)a$$

可得

$$b_0 = \frac{M + m}{\kappa} a_0$$

为了使物体与小车保持相对静止而且在某时刻受到的摩擦力为零,那么小车在平衡位置左侧刚释放时到平衡位置的距离应满足 $b_0 < b < b_{\max}$,即

$$\frac{(M + m)g \tan \theta}{\kappa} < b < \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \frac{(M + m)g}{\kappa} \quad (1)$$

2 小车在平衡位置右侧与物体相对静止

当小车在 B 点刚释放时将加速向左运动,物体在失重的状态下只有沿斜面向下滑的趋势,为了使物体与小车保持相对静止,物体受到摩擦力的方向必须沿斜面向上. 这是因为整个弹簧振子受到的最大回复力方向水平向左,则最大加速度方向水平向左,那么物体受到的最大合力方向水平向左,由于重力竖直向下,支持力垂直于斜面向右,所以最大静摩擦力方向一定沿斜面向左. 由于加速度越大,越容易发生相对滑动,因此小车刚释放时的加速度存在最大值,此时物体刚好不发生滑动,但有沿斜面向下滑的趋势,摩擦力刚好为最大静摩擦力 $f_m = \mu N$. 在垂直于斜面方向由牛顿第二定律有

$$mg \cos \theta - N = ma \sin \theta$$

在平行于斜面方向由牛顿第二定律有

$$f_m - mg \sin \theta = ma \cos \theta$$

联立方程可得小车刚释放时的最大加速度为

$$a'_{\max} = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} g$$

对于 a'_{\max} 还有一种求解方法,对物体 m 在竖直方向由受力平衡有

$$f \sin \theta + N \cos \theta = mg$$

在水平方向由牛顿第二定律有

$$f \cos \theta - N \sin \theta = ma$$

当摩擦力为最大静摩擦力时,有 $f = \mu N$. 联立方程可得 a'_{\max} .

对整体由牛顿第二定律有 $\kappa b = (M + m)a$,可得

$$b'_{\max} = \frac{M + m}{\kappa} a'_{\max} = \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \frac{(M + m)g}{\kappa}$$

如果向左的加速度过大,物体与小车将发生分离. 当物体与小车刚要分离时,物体受到的支持力刚好为零,此时摩擦力也刚好为零,物体只受重力,做自由落体运动的加速度为 $a_y = g$,小车的加速度为 $a_x = a$. 刚要分离时二者在垂直于斜面方向的加速度相等,即

$$g \cos \theta = a \sin \theta$$

可得最大加速度

$$a'' = \frac{\mu \cos \theta}{\mu \sin \theta} g > a'_{\max}$$

可知对应弹簧的形变量 $b'' = \frac{M}{\kappa} a''$,而且必须满足

$b'' > b'_{\max}$,即 $\frac{M}{m} > (\mu \cos \theta - \sin \theta) \sin \theta$,因此,为了使物体与小车保持相对静止,弹簧的最大形变量应为 b'_{\max} . 所以,为了使物体不发生滑动,小车在平衡位置右侧刚释放时到平衡位置的距离应满足

$$b < \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \frac{(M + m)g}{\kappa} \quad (2)$$

3 小车在简谐运动过程中与物体相对静止

设 b_{\max} 对应小车的位置在 C_2 点, b_0 对应小车的位置在 C_1 点, b'_{\max} 对应小车的位置在 B 点,可画出小车在平衡位置两侧时弹簧形变量 b 的临界值对应小车所在的位置分布如图 2 所示.

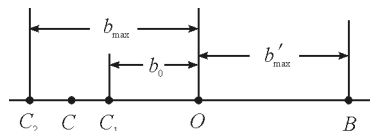


图2 弹簧形变量对应小车所在位置

观察 b_{\max} 和 b'_{\max} 的表达式可知,一定有 $b_{\max} > b'_{\max}$,那么在图 2 中一定有 $OC_2 > OB$. 根据简谐运动的对称性可知,小车在平衡位置两侧的振幅相等,那么为了使小车在平衡位置左侧和右侧做简谐运动时物体都能保持相对静止,振幅的最大值应取 b_{\max}



巧用思维流程图梳理物理解题思路*

——以第32届全国中学生物理竞赛预赛模拟试卷三第10题为例

张枫苑

(新疆生产建设兵团第二中学 新疆 乌鲁木齐 830002)

(收稿日期:2020-06-14)

摘要:将信息学科中的流程图应用到梳理物理解题的思路中,将思维流程图的思路呈现方式与标准答案叙述方式对比分析,以此来得出思维流程图在推理线性思路方面的优势,帮助大家更加直接更加快捷地推理思路。

关键词:思维流程图 巧解 推理 竞赛

学生在步入高中生活之后,普遍反映高中的物理学科与初中的物理学科有很大的差别,学生认为高中物理的计算题综合性强,对思维要求高,常常无法找准切入点,很难梳理出完整思路。

思维流程图源于计算机语言中的流程图,即用简单的字母或文字符号表示的推理思路、步骤、因果联系最后得出结果的思维过程示意图.学生的推理思维能力还没有完全建立起来,在较复杂物理问题

和 b'_{\max} 中较小的,即 b'_{\max} ,则 $OC = OB = b'_{\max}$.此外,为了使小车在平衡位置左侧经过某一位置时受到的摩擦力为零,则需 $OC > OC_1$,即振幅 $b'_{\max} > b_0$.因此,当小车在平衡位置两侧运动时物体不发生滑动而且会出现某时刻摩擦力为零的条件是简谐运动的振幅应满足 $b_0 < b < b'_{\max}$,即

$$\frac{(M+m)g \tan \theta}{\kappa} < b < \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \frac{(M+m)g}{\kappa} \quad (3)$$

这就是原题的正确答案,也可由不等式(1)和(2)取交集而得到.但对原题还需补充动摩擦因数为 μ ,否则在答案中将出现未知量。

为了使式(3)成立,还需具备一个前提条件.由不等式(3)利用同向不等式的传递性可得 $b_0 < b'_{\max}$,由此得

$$\tan \theta < \frac{\mu - \tan \theta}{1 + \mu \tan \theta}$$

面前束手无策,而思维流程图采用“一因一果”的渐进式推理,适合学生思维特点,能够帮助学生逐步形成线性的物理思维方法,从而提高学习效率.本文旨在探究将思维流程图应用于高中物理解题中的效果,下面以一道竞赛题为例展开论述,供读者参考。

【例题】(第32届全国中学生物理竞赛预赛模拟试卷三第10题)如图1所示,屋架由同在竖直面内的多根无重杆绞接而成,各绞接点依次为1,2,⋯,9,

即
$$\mu \tan^2 \theta + 2 \tan \theta - \mu < 0$$

可得
$$\mu > \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

利用倍角公式得 $\mu > \tan 2\theta$.

为了在简谐运动过程中出现摩擦力为零的情况,应满足 $\mu > \tan 2\theta$,即 $\tan 2\theta < \mu$,则 $\theta < 0.5 \arctan \mu$,这是保证式(3)成立的前提条件.如果不满足这个条件,那么式(3)将不成立,就不会出现摩擦力刚好为零的状态.在一般情况下 $\mu < 1$,则 $2\theta < 45^\circ$,即 $\theta < 22.5^\circ$,而不是 $\theta < 45^\circ$.由此可见,小车斜面的倾斜角应该还是比较小的,这样才满足题意.在 $\mu > \tan 2\theta$ 的条件下,必定满足 $\mu > \tan \theta$,那么当小车运动到平衡位置时物体一定不下滑.所以原题的完整答案应为式(3)和约束条件 $\mu > \tan 2\theta$.

参考文献

- 1 裴晓媛. 慎重对待命题中的“拿来主义”[J]. 物理通报, 2012(3): 48 ~ 49

* 以思维流程图建立的新疆陶研会“十三五”课题,该文为此课题阶段性成果,课题编号: XJKT-2020年089号。