



利用图像法巧解一类均匀带电双圆环问题

郑金

(凌源市职教中心 辽宁 朝阳 122500)

(收稿日期:2019-11-29)

摘要:给出了单个均匀带电圆环在轴线上各点产生的场强随距离变化的关系式和极值条件以及图像并分析其特点,利用图像叠加法对有关两个均匀带电圆环在轴线上产生电场的问题进行巧妙解答.

关键词:带电圆环 场强叠加 对称性 图像法

对于单个均匀带电圆环在垂直于圆面的轴线上产生的电场,其场强变化具有一定的规律性.首先定性分析轴线上的场强变化特点,可大致画出圆环一侧轴线上的场强随距离变化的图像如图1所示.由于在圆心处场强为零,在无穷远处场强也为零,那么场强必然先增大后减小,因此在轴线上的场强存在最大值,其位置离圆环很近,由此可判断场强从零开始很快增大,然后缓慢减小.由于圆环两侧的场强方向相反,则在定义域内的整个图像关于原点对称,可根据对称性画出圆环另一侧轴线上的场强矢量随距离变化的图像,位于横轴的下方.

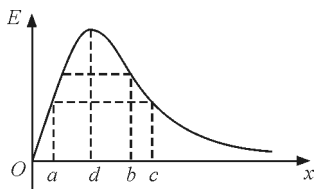


图1 均匀带电圆环一侧轴线上的场强分布

由图1可见,在原点 O 处的场强为零,其余各点处的场强均大于零,那么原点 O 关于场强最大值位置对称点 c 处的场强必大于零.由此推知,在点 O 与 c 之间,到场强最大值位置相等距离的任意两点 a 和 b 处的场强不相等,而是左侧 a 点处的场强小于右侧 b 点处的场强,即 $E_a < E_b$.另一方面,场强的变化可视为从最大值开始分别向左右两个方向单调递减,在向左逐渐递减的过程中,场强从最大值连续减小到零通过很小的距离,因此场强减小得快;在向右逐渐递减的过程中,场强从最大值连续减小到零通过的距离为无穷大,因此场强减小得慢,所以 $E_a < E_b$.

还可进行定量推导证明.设圆环半径为 R ,带电量为 Q ,在过圆心 O 垂直于圆环平面的轴线上有一点 P ,到圆心的距离为 $OP = x$,利用对称性和微元法可推导出轴线上的场强随距离变化的关系式为^[1]

$$E = \frac{kQx}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}$$

场强 E 为 x 的奇函数,令一阶导数为零可知,当 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}R$ 时,场强最大.设 a 点与 b 点到场强极值点的水平距离均为 l ,令 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}R$,则有

$$E_a = \frac{kQ(d-l)}{\sqrt{[R^2 + (d-l)^2]^3}}$$

$$E_b = \frac{kQ(d+l)}{\sqrt{[R^2 + (d+l)^2]^3}}$$

为了证明 $E_a < E_b$,只需证明不等式 $(d-l)^2 [R^2 + (d+l)^2]^3 < (d+l)^2 [R^2 + (d-l)^2]^3$.

利用数学公式和一定的数学技巧,通过大量的数学运算,可推出一个等价不等式

$$4l^4 + 4R^2l^2 - 7R^4 < 0$$

这是关于 l^2 的一元二次不等式,利用抛物线的性质和求根公式可得

$$0 \leq l^2 < \frac{2\sqrt{2}-1}{2}R^2$$

由于 $d^2 = \frac{1}{2}R^2 < \frac{2\sqrt{2}-1}{2}R^2$,因此当 $0 < l^2 < \frac{1}{2}R^2$ 时,即当 $0 < l < d$ 时,等价不等式仍然成立,所

以在第一象限有 $E_a < E_b$.

对有关两个相互平行而且正对的均匀带电圆环在轴线上产生电场的分布特点问题,若用定量推导的方法进行解答则很繁琐,而利用图像法进行解答,可化繁为简.下面利用单个圆环轴线上的场强随距离变化的图像来解答两道有关双圆环产生静电场的物理问题.

【例1】如图2所示^[2],两个相同圆环相隔一定距离同轴固定在竖直平面内,点 O_1 和 O_2 分别为两圆环的圆心,两圆环均匀分布有等量异种电荷.一个不计重力的带正电的粒子从无穷远处以某一初速度沿轴线穿过两圆环,则带电粒子在运动过程中()

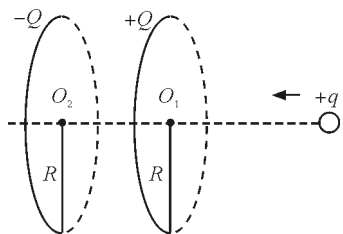


图2 例1题图

- A. 在点 O_1 处粒子的加速度方向水平向左
 B. 从点 O_1 到 O_2 的过程中粒子电势能一直增加
 C. 轴线上 O_1 点右侧存在一点,在该点粒子动能最小
 D. 轴线上 O_1 点右侧, O_2 点左侧都存在场强为零的点,它们关于 O_1 与 O_2 连线中点对称

解析:对于选项A,需判断 O_1 点处的场强方向.右侧圆环在 O_1 点产生的场强为零,左侧圆环在 O_1 点产生的场强方向向左,因此两个圆环共同在 O_1 点产生的场强方向向左,那么带正电的粒子受到的电场力方向向左,所以粒子的加速度方向水平向左,选项A正确.对于选项B,需判断 O_1 与 O_2 之间的场强方向.由于两个点电荷在 O_1 与 O_2 之间产生的场强方向相同,都向左,因此合场强方向向左,所以在带正电粒子从 O_1 点运动到 O_2 点的过程中,电场力始终做正功,则粒子的电势能一直减少,选项B错误.

对于选项D,需寻找轴线上合场强为零的点.对于轴线上的合场强分布特点,可用图像法来分析.以 O_2 点为原点,以轴线为 x 轴建立直角坐标系,对圆环轴线的左右端而言,规定水平向左为空间场强的正方向,在同一坐标系中分别画出两个圆环在轴线上产生的场强随距离变化的图像如图3所示.

为了在轴线上寻找合场强为零的点,可在坐标系中画纵轴的平行线,分别与横轴上方和横轴下方的两个图像相交,只要两个交点到横轴的距离相等,那么纵向直线与横轴的交点就表示空间合场强为零的位置,由对称性可知,场强为零的位置共有两点 F 和 G ,故选项D正确.

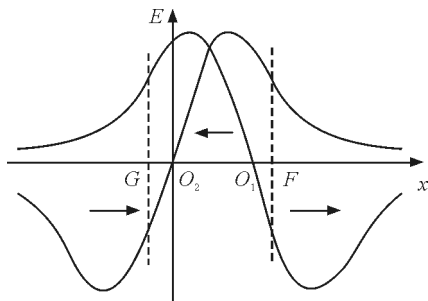


图3 两均匀带等量异号电荷圆环轴线上的场强分布

对于选项C,需判断轴线上某点合场强是否为零,而且粒子是否先受阻力,后受动力.在 O_1 点右侧的合场强为零的点 F ,在过该点的虚线的左侧,两个图像对应的纵坐标之和大于零,或者说由图像表示的合场强大于零,表明空间合场强的方向与规定的正方向相同,即水平向左,画一个小箭头来表示;在虚线的右侧,由图像表示的合场强小于零,表明空间合场强的方向与规定的正方向相反,即水平向右.由此可见,在轴线上的空间合场强为零的点是合场强的方向发生改变的位置,可知带正电粒子向左运动经过点 F 前后受到的电场力先为阻力,后为动力,那么带正电粒子先减速运动后加速运动,因此带正电粒子经过该点时的动能最小,故选项C正确.可以判断,当粒子经过点 G 时动能最大.

如果两个圆环之间的距离大于 $\sqrt{2}R$,那么轴线上场强变化图像如图4所示,由此可得相同结果.

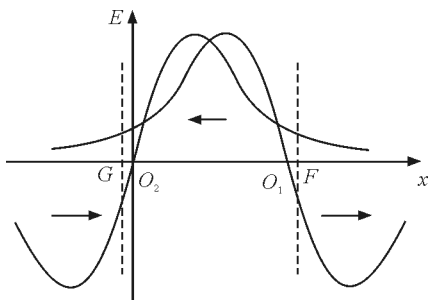


图4 两均匀带等量异号电荷圆环距离大于 $\sqrt{2}R$ 时的场强分布

若圆环间距为 $\sqrt{2}R$,则由图像可知结果相同.

【例2】如图5所示^[3],两个固定的相同细圆环相隔一定距离同轴放置,点 x_1 和 x_2 为两圆环的圆心,两圆环分别带有均匀分布的等量正电荷, x 轴垂直于环面而且过两细圆环的圆心.下列说法中正确的是()

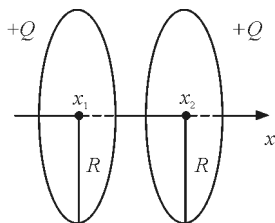


图5 例2题图

- A. x_1 点的场强沿 x 轴正方向
 B. x_2 点的场强沿 x 轴正方向
 C. 点 x_1 与 x_2 之间沿 x 轴正方向电势逐渐升高
 D. 点 x_1 与 x_2 之间沿 x 轴正方向电势逐渐降低

解析:左侧圆环在 x_1 处产生的场强为零,右侧圆环在 x_1 处的场强方向向左,因此两个圆环共同在 x_1 处的场强方向向左,即沿坐标轴负方向,选项 A 错误.左侧圆环在 x_2 处的场强向右,右侧圆环在 x_2 处的场强为零,因此两个圆环共同在 x_2 处产生的场强方向向右,即沿坐标轴正方向,选项 B 正确.

对于选项 C 和 D,为了判断电势增减的变化情况,需判断电场线的方向变化情况.以点 x_1 为坐标原点,以轴线为横轴建立直角坐标系,规定水平向右为空间场强的正方向,可在同一坐标系中分别画出两个圆环在轴线上产生的场强随空间位置坐标变化的图像.若点 x_1 与 x_2 之间的距离恰好等于 $\sqrt{2}R$,则其中一个图像的最高点与另一个图像的最低点位于同一竖直线上,如图6所示.

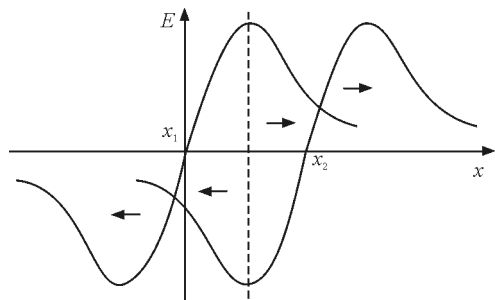


图6 两均匀带等量正电荷圆环间距为 $\sqrt{2}R$ 时轴线上的场强分布

由于极值点两侧到场强最大值位置相等距离的两点处的场强不相等,因此在轴线上的合场强为零

的位置只有一个,即为点 x_1 和 x_2 连线的中点.可知合场强的方向先向左,后向右,那么沿 x 轴正方向的电势先升高,后降低,故选项 C 和 D 都错误.

如果点 x_1 与 x_2 之间的距离小于 $\sqrt{2}R$,则图像如图7所示,在点 x_1 和 x_2 之间找合场强为零的位置,只有一个,恰好在连线 x_1x_2 的中点处.可见在点 x_1 与 x_2 之间沿轴线方向的电场强度的矢量和先为负值,增大到零后,再为正值,在图中标出空间电场线的方向,表明合场强的方向先向左,后向右,那么沿 x 轴正方向的电势先升高,后降低,故选项 C 和 D 都错误.

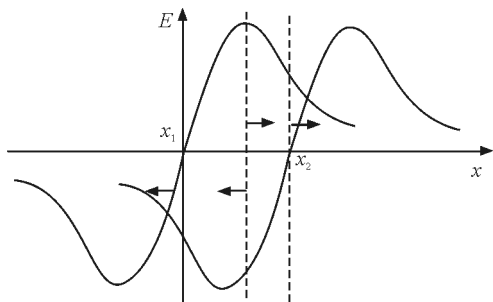


图7 两均匀带等量正电荷圆环间距小于 $\sqrt{2}R$ 时轴线上的场强分布

若点 x_1 与 x_2 之间的距离大于 $\sqrt{2}R$,则场强变化图像如图8所示.在点 x_1 与 x_2 之间找场强为零的位置,共有3个,过每个场强为零的位置分别画出一条平行于纵轴的虚线,3条虚线把 x_1 和 x_2 之间分为4个区间,根据图像表示的合场强的正负分别标出空间电场线的方向,根据沿电场线方向电势降低可知,在 x_1 与 x_2 之间沿 x 轴正方向电势先升高,再降低;然后再升高,最后降低^[4].选项 C 和 D 都错误.

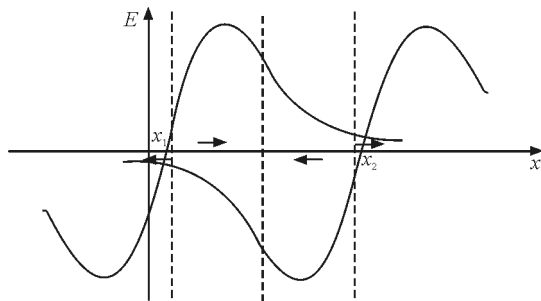


图8 两均匀带等量正电荷圆环间距大于 $\sqrt{2}R$ 时轴线上的场强分布

总之,对于同一个坐标系中分别画出两个圆环在轴线上产生的场强随距离变化的图像,既反映场强的大小,也反映场强的方向,但纵轴的方向并非空间场强的方向,而是表示轴线上各点场强取值的正

基于物理观念 突出问题本质 强化科学思维

——对一道物理复赛理论题解法的分析思考

陈鸿翔

(湖州市菱湖中学 浙江 湖州 313018)

(收稿日期:2020-10-02)

摘要:对第35届全国中学生物理复赛理论题第2题所涉及的物理模型与命题思想进行简单的评述,从运动与相互作用观念的角度对该问题所涉及的动力学特征进行分析,并在拓展解题思路与方法上突出小球沿水平面做机械振动的物理本质,从而为学生解决问题、强化思维能力提供一定的参考与帮助.

关键词:物理复赛 机械振动 运动方程 数列求和

1 问题呈现与命题分析

第35届全国中学生物理复赛理论题第2题呈现如下.

【原题】如图1所示,劲度系数为 κ 的轻弹簧左端固定,右端连一质量为 m 的小球;弹簧水平,它处于自然状态时,小球位于坐标原点 O ;小球可在水平地面上滑动,它与地面之间的动摩擦因数为 μ .小球初始速度为零,将此时小球相对于原长的伸长量记为 $-A_0$ ($A_0 > 0$,但 A_0 并不是已知量).重力加速度大小为 g ,假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力.

(1) 如果小球至多只能向右运动,求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件;

(2) 如果小球完成第一次向右运动至原点右边

后,至多只能向左运动,求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件;

(3) 如果小球只能完成 n 次往返运动(向右经过原点,然后向左经过原点,算1次往返),求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件;

(4) 如果小球只能完成 n 次往返运动,求小球从开始运动直至最终静止的过程中运动的总路程.

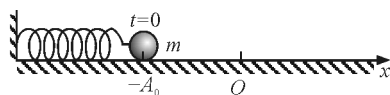


图1 原题题图

根据题意可知小球的运动是以 O 点为平衡位置的机械振动,但由于摩擦力的作用,小球的振动并不是简谐运动.因此,命题者的初衷只是以小球振动为

负,当轴线上某点的场强取正值时,表示该点处的场强方向与规定的正方向相同;当轴线上某点的场强取负值时,表示该点处的场强方向与规定的正方向相反.横轴上的某点对应两个图像的数值之和的绝对值表示该点合场强的大小,两个数值之和的正负表示该点合场强的方向.要注意两个圆环之间的距离与极值条件 $\sqrt{2}R$ 之间的大小关系包括3种情形,若数量关系不同,则两个图像叠加的效果不同,因此需画出两种一般情形的图像,但在画图像之前应首先规定电场强度的正方向.在用图像叠加法解答有关均匀带电双圆环静电场问题时,关键是在轴线上找到所有的场强为零的点,即合场强方向的转折点,

由此可判断场强的变化情况以及电势的变化情况,显得形象直观,巧妙快捷.虽然这种图像法具有一定的难度,但比定量推导的方法要简便很多,实际是解答这类问题的最佳方法.

参考文献

- 1 郑金. 探究几种均匀带电体的场强及最大值. 物理通报, 2014(S2):59~61
- 2 蔡本再. 电场问题的等效法处理[J]. 中学物理, 2013, 31(8):79~80
- 3 汪海林. 对一道电势变化问题的讨论[J]. 物理之友, 2018,34(2):43~44
- 4 杨军. 双带电圆环轴线上电场强度和电势的分布探究[J]. 物理教师, 2017,38(7):66~67