竞赛与物理专题研修

浅谈自由转动支点的刚体碰撞类习题的解法*

——“复摆”模型的应用

李　惠

（株洲市第二中学　湖南 株洲　412000）

（收稿日期：2020－03－09）

摘　要：把“复摆”模型应用到一类刚体的碰撞类问题中，能快速找到刚体瞬时转轴的位置，把刚体的平面平行运动简化为绕瞬时转轴的定轴转动，并展示了几个应用的实例.

关键词：刚体　碰撞　瞬时转轴　自由转动支点　复摆

笔者在中学物理竞赛教学中，发现以下这种习题最能考验学生对力学规律的理解是否到位. 如图 1 所示，光滑水平面上静止放置质量为 M，长为 L 的均匀细杆，质量为 m 的质点以垂直于杆的水平初速 v_0 与杆的一端做完全非弹性碰撞. 求碰后的角速度.

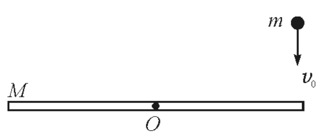

图 1　习题情境图

学生的主要思维障碍在于无法在头脑中形成碰后瞬间刚体系统做平面平行运动的物理图像，不知从什么方向寻找解题突破口，处理杆的转动时，总执拗地去找刚体在碰后的瞬时转轴，以期把平面平行运动转化为定轴转动，从而降低题目难度. 这一思路本身没有错，但学生一时半会无法准确找到碰后的系统瞬时转轴位置，难以顺利解题. 在上述碰撞类问题中，系统没有固定转轴，碰撞发生后的瞬间，会有一个实际的瞬时转轴（静止点），这个瞬时转轴的位置取决于碰撞点的位置以及刚体自身质量分布等因素，它与刚体的交线在平面平行运动的平面内的投影也即本文标题中的“自由转动支点”. 那么，如何处理自由转动支点的刚体的碰撞类问题呢？本文从多个角度来详细阐述.

1　常规解法

取小球初速度 v_0 的方向为正方向，垂直于纸面向里为角动量正方向，设小球碰后速度为 v'，也即小球碰后附着点-杆右端的速度，设碰后杆中心点的速度为 $v_{C杆}$，角速度为 ω，小球与杆右端碰撞的相互作用力大小为 $F(t)$，碰撞持续极短时间 τ，对小球，根据动量定理

$$\int_0^{\tau} -F\mathrm{d}t = mv' - mv_0$$

对杆，根据动量定理

$$\int_0^{\tau} F\mathrm{d}t = Mv_{C杆} - 0$$

在杆的质心系中取杆质心为参考点，根据角动量定理，有

$$\int_0^{\tau} \frac{L}{2}F\mathrm{d}t = \frac{1}{12}ML^2\omega - 0$$

再关联杆中心点和杆右端点的速度

$$v' = v_{C杆} + \frac{1}{2}\omega L$$

* 北京市物理学会课题“利用物理实验进行思维培养”，课题编号：WLXH202085；北京市海淀区教育科学“十三五”规划重点课题，课题编号：HDGH20190054

联立以上 4 个式子,解得

$$\omega=\frac{6mv_0}{(M+4m)L}$$

这个方法从参与碰撞的球和杆两个角度阐述物理的基本规律是如何体现在碰撞情境中的,对于习惯处理重力、摩擦力等常力作用下物理情境的学生而言,这是很基础、很简洁的一种理解碰撞作用力的好方法.

2　在质心系中利用角动量守恒解此题

如图 2 所示,取杆和质点为研究对象,根据动量守恒,可求得质点系质心的速度 v_C

$$mv_0=(M+m)v_C$$

再在质心系中来研究该碰撞,以质心 C 为参考点,碰撞前后系统的角动量是守恒的.

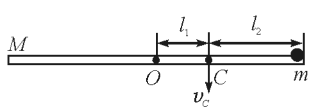

图 2　碰撞后质心 C 的位置

先把质心位置找出来,以 l_1 和 l_2 表示质心与杆中心、与质点 m 的距离.

$$l_1=\frac{m}{M+m}\frac{L}{2}$$

$$l_2=\frac{M}{M+m}\frac{L}{2}$$

碰后质点、杆绕系统质心的转动惯量分别为

$$I_1=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{m}{M+m}\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_2=m\left(\frac{M}{M+m}\frac{L}{2}\right)^2$$

碰前杆、质点相对系统质心的初始角动量方向相同,分别为

$$L_1=Mv_Cl_1=M\left(\frac{m}{M+m}\right)^2v_0\frac{L}{2}$$

$$L_2=M(v_0-v_C)l_2=m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2v_0\frac{L}{2}$$

碰后系统相对质心的角动量为

$$L'=(I_1+I_2)\omega=\frac{\omega L^2}{4}\left(\frac{Mm}{M+m}+\frac{M}{3}\right)$$

代入角动量守恒方程

$$L'=L_1+L_2$$

得

$$\omega=\frac{6mv_0}{(M+4m)L}$$

设瞬时转轴在质心 C 左侧 l_0 处,如图 3 所示,求得

$$l_0=\frac{M+4m}{6(M+m)}L$$

当然,上述解题过程还可适当地简化,比如说,碰前的角动量,我们可以直接根据二体系的相对角动量等于质心系中相对质心的角动量(证明过程略)直接得出碰后的角速度 ω,进而快速求解瞬时转轴的位置. 即

$$\mu v_0\frac{L}{2}=(I_1+I_2)\omega$$

$$l_0=\frac{v_C}{\omega}$$

其中,μ 为二体系中小球的折合质量.

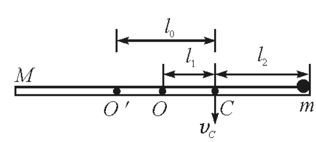

图 3　碰撞后系统瞬时转轴位置 O'

3　用“复摆”模型解此题

3.1　“复摆”模型的特点

如图 4 所示,一个任意形状、质量为 m 的刚体,被悬挂在通过 O 点的光滑水平转轴上. 当物体重心处于转轴 O 点正下方时,物体静止;当物体略有偏离,可在平衡位置附近左右摆动,故称“复摆”. 现在讨论复摆的小角度摆动.

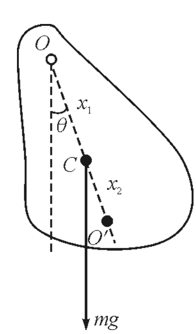

图 4　复摆

设质心轴的回转半径为 k,刚体绕过 O 点的水平轴定轴转动,转动惯量为 I_O,刚体质心 C 与转轴 O 的距离为 x_1. 根据定轴转动定律及小角近似得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgx_1}{I_O}\theta=0$$

可得微振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgx_1}}=2\pi\sqrt{\frac{mk^2+mx_1^2}{mgx_1}}=$$

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1+\frac{k^2}{x_1}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{x_1+x_2}{g}}$$

与单摆周期公式类比，我们把 x_1+x_2 称为复摆的等值摆长. 其中，$x_2=\frac{k^2}{x_1}$ 是一个由刚体本身质量分布和实际转轴位置而决定的物理量. 我们表示在图 4 中，即相当于 OO' 为等值摆长. 如果我们把刚体倒过来以过 O' 的水平轴做微振动，根据以上结论可得周期 T' 为

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{x_2+\frac{k^2}{x_2}}{g}}$$

要使复摆绕 O' 的水平轴的微振动周期与绕 O 的水平轴的微振动周期相等，则有

$$T'=T\qquad x_1x_2=k^2$$

这个结论告诉我们，如果在刚体上过质心的任意一条直线上，找到与质心相距 x_1 和 x_2 并分居质心两侧的两个点 O 和 O'，只要满足 $x_1x_2=k^2$，O 和 O' 两点就是共轭的，刚体绕这两个点定轴转动的周期相等. 实验室就是利用了这一特性只做了可倒摆.

接下来，我们来讨论这么个小问题：假设刚体悬挂点距离质心 C 为 x 的 A 点(图 5)，在 O' 给刚体一个垂直于 AO' 连线方向的冲量 J，x 的取值为多少才能使得悬挂处受瞬时冲击的过程中不产生任何附加作用力? 首先，假设满足条件的悬挂点 A 距离质心 x，根据质心运动定理和以质心 C 为参考点的角动量定理得

$$J=mv_C\qquad Jx_2=mk^2\omega$$

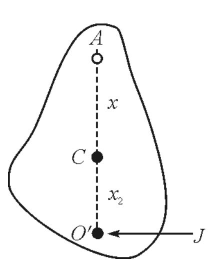

图 5　讨论打击中心

已知质心平动速度和刚体的角速度，即可得

$$x=\frac{v_C}{\omega}=\frac{k^2}{x_2}$$

可见 $x=x_1$，这说明符合条件的 A 点即之前我们提到的 O 点. 换句话说，如果 O 点处不存在固定转轴，刚体在 O' 点受到碰撞等冲击时，刚体的自由转动支点就是 O 点. 由于 O 和 O' 两点共轭，当刚体在 O 点受到碰撞等冲击时，刚体的自由转动支点就是 O' 点. O 和 O' 互为打击中心.

3.2　用复摆模型速解自由转动支点位置

回到本文文首的题目，不管质点以多大的速度与细杆发生完全非弹性碰撞，质点都相当于在细杆的右端施加了一个瞬时冲量，使得冲量结束后杆和质点这个“刚体”绕自由支点定轴转动. 先用以上模型求该支点位置. 如图 6 所示. 算出质心轴的回转半径 k，l_2 相当于模型中的 x_2，l_0 相当于模型中的 x_1，即可得到碰后的角速度.

$$mk^2=I_1+I_2$$

$$k^2=l_2l_0$$

$$mv_0=(M+m)v_C$$

$$\omega=\frac{v_C}{l_0}$$

结论与常规解法一致.

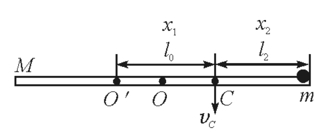

图 6　用复摆模型举例

4　“复摆”模型解决此类问题的应用实例

4.1　实例 1

如图 7 所示，质量未必相同的两个小球 A 和 B 用轻杆相连后放在光滑水平面上，桌面上另一个小球 D 以垂直于杆方向的速度撞击 B 球，试证明碰后瞬间 A 球的瞬时速度为零.

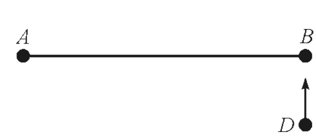

图 7　题图

本题是舒幼生老师编著的《力学》[1] 上的一道例题.笔者采用与编者不一样的方法来证明.如图 8 所示,设 A 和 B 球的质量分别为 m_1 和 m_2,相距 L,两球与轻杆构成的系统的质心 C 距离 A 和 B 球的距离分别为 l_1 和 l_2.

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}L$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}L$$

系统的质心轴回转半径为 k,则

$$(m_1 + m_2)k^2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

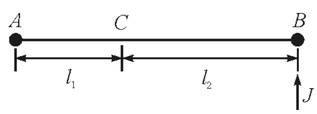

图 8　实例 1 图

设在质心左侧距离质心 C 为 x_1 的位置为自由转动支点,根据复摆模型,有

$$k^2 = l_2 x_1$$

解得
$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}L$$

也即 $x_1 = l_1$,说明自由转动支点恰好是 A 球.此题得证.

4.2　**实例 2**

(第 23 届全国中学生物理竞赛复赛题节选)如图 9 所示,一根轻杆,长为 $2l$,两端、中心处分别固连着质量均为 m 的小球 B,D,C,开始时静止在光滑的水平桌面上.桌面上另一质量为 M 的小球 A,以给定初速度 v_0 沿垂直于杆的方向与 B 球发生弹性碰撞,求刚碰后 4 个小球的速度.

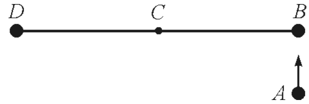

图 9　实例 2 图

常规解法笔者不再赘述.这里采用复摆模型来解题.先确定 B,C,D 球及轻杆系统在碰撞后的自由转动支点,设该支点在球 C 左侧 x 处

$$3mk^2 = 2ml^2$$

$$k^2 = xl$$

解得
$$x = \frac{2}{3}l$$

可见,碰后 B,C,D 球及轻杆系统是一个绕 O 点定轴转动的刚体(图 10).

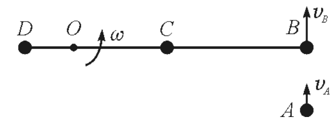

图 10　用复摆模型解题

设碰后球 A 和球 B 的速度分别为 v_A 和 v_B,球 C 和 D 的速度分别为

$$v_C = \frac{2}{5}v_B$$

$$v_D = \frac{1}{5}v_B$$

根据弹性碰撞的特点,有

$$v_0 = v_B - v_A$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{5}v_B\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{5}v_B\right)^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

解得

$$v_B = \frac{10M}{5M + 6m}v_0$$

$$v_A = \frac{5M - 6m}{5M + 6m}v_0$$

$$v_C = \frac{4M}{5M + 6m}v_0$$

$$v_D = \frac{-2M}{5M + 6m}v_0$$

计算过程中计算量没有常规解法那么大,而且逻辑思维能更直观地借助定轴转动体现出来.

由此可见,用复摆模型解决自由转动支点的刚体的碰撞类问题,能迅速找到刚体的瞬时转轴位置,从而把刚体的平面平行运动(3 个自由度)转化为刚体的定轴转动(1 个自由度),化繁为简,化抽象为直观,更有助于我们理解力学规律在实际的物理情境中的体现过程.

参 考 文 献

1　舒幼生.力学.北京:北京大学出版社,2005.155 ~ 156