

## 两种方法巧解“水池排水时间”问题

张伟

(重庆市万州高级中学 重庆 404120)

(收稿日期:2020-03-11)

**摘要:**“水池排水时间”问题在高中物理中一般是采取简化,认为水是匀速流出再求时间.但是考虑实际情况,随着水的流出,出口处的压力越来越小,水的流速越来越慢,水流速度并非匀速.通过分别从竞赛层面和高考层面用两种方法来处理理想流体在重力场中的“水池排水时间”问题.

**关键词:**水池排水 伯努利方程 能量守恒 平均值

**【例题】**如图1所示,一底面积为 $S$ ,高为 $H$ 的圆柱形水池装满水(视作理想流体),在水池底部侧面有一横截面积为 $S_0$  ( $S_0 \ll S$ )的小孔(小孔的线度远小于 $H$ ),在只考虑重力的情况下,求水全部流完所需要的时间.(已知重力加速度为 $g$ )

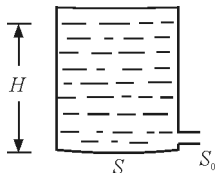


图1 例题题图

### 1 竞赛层面 用伯努利方程和微积分的方法

由于水从小孔流出导致液面下降,设液面下降的速度为 $v_1$ ,从小孔中流出水的速度为 $v_2$ (如图2),由于液体不可压缩,在一个极短的时间 $\Delta t$ 内满足

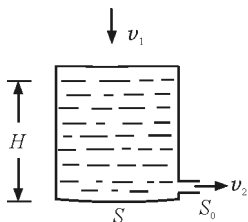


图2 例题微积分法求解分析

$$v_1 \Delta t S = v_2 S_0 \Delta t \quad (1)$$

解得

$$v_1 = \frac{S_0}{S} v_2 \quad (2)$$

选择小孔处为零势能面,某一时刻液面到小孔的高度为 $h$ ,由伯努利方程得<sup>[1]</sup>

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + 0 \quad (3)$$

式(3)中, $P_0$ 表示大气压, $\rho$ 表示水的密度.

由于 $S_0 \ll S$ ,式(2)中 $v_1$ 近似等于零,则可通过式(3)解得

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (4)$$

设在 $dt$ 时间内,液面高度变化(末态高度与初始高度的差值)为 $dh$  ( $dh < 0$ ),由于液体不可压缩,则

$$-S dh = S_0 v_2 dt \quad (5)$$

将式(4)代入式(5),得

$$dt = -\frac{S}{S_0} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (6)$$

对式(6)两边同时积分,得

$$\int_0^t dt = -\frac{S}{S_0 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (7)$$

得

$$t = -\frac{S}{S_0 \sqrt{2g}} \left| 2h^{\frac{1}{2}} \right|_H^0 \quad (8)$$

解得

$$t = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

### 2 高考层面 运用能量守恒和平均值法巧解

由前面式(1)、式(2)和 $S_0 \ll S$ ,得 $v_1$ 近似等于零,可认为在极短的时间 $\Delta t$ 内,液面下降的高度 $\Delta h \ll h$ ,液面处质量为 $\Delta m$ 的一层很薄的水层(如图3)下降时具有的动能为零.

## 教学拓展

## 疑难问题解析

## 动生电动势和感生电动势的联系

张奔腾

(玉溪衡水实验中学 云南 玉溪 653100)

(收稿日期:2020-03-06)

**摘要:**通过适当构造一个“面积”以后,使得动生电动势和感生电动势在形式上一致,并给出了这样的“面积”应该如何构造.通过电磁场的洛伦兹变换,从运动的相对性的角度再次说明两者之间的联系.

**关键词:**动生电动势 感生电动势 洛伦兹变换 联系

法拉第电磁感应定律:只要穿过回路的磁通量发生了变化,在回路中就会有感应电动势产生.实际上,常见的有两种情况:(1)回路部分相对恒定磁场运动( $S$ 变 $B$ 不变);(2)回路相对磁场静止,磁感应强度变化( $S$ 不变 $B$ 变).我们把第一种情况产生的感应电动势称为动生电动势,第二种称为感生电动势.动生电动势和感生电动势之间存在什么联系呢?

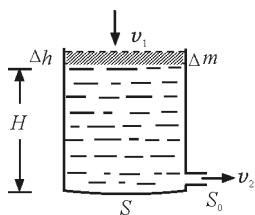


图3 例题能量守恒法求解分析

根据能量守恒定律,液面下降时薄水层减少的重力势能应该转化为从小孔流出去时水的动能,即

$$\Delta mgh = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 \quad (9)$$

解得

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (10)$$

式(10)表明,水从小孔流出的速度和物体从高 $h$ 处做自由落体运动的末速度是一样的.

由自由落体的规律可知,小孔中流出水的速度 $v_2$ 与时间 $t$ 应该是线性关系.做出 $v_2-t$ 的函数图像,如图4所示.设小孔中流出水的平均速度为 $\bar{v}_2$ ,则

$$\bar{v}_2 = \frac{0 + \sqrt{2gH}}{2} = \frac{\sqrt{2gH}}{2} \quad (11)$$

由于液体不可压缩,可得

### 1 从非静电力的角度看动生电动势和感生电动势之间的联系

动生电动势的非静电力是洛伦兹力<sup>[1]</sup>

$$\epsilon_{\text{动}} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

方向由 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 决定.

感生电动势的非静电力是涡旋电场力

$$SH = S_0 \bar{v}_2 t \quad (12)$$

将式(11)代入式(12),解得

$$t = \frac{S}{S_0} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

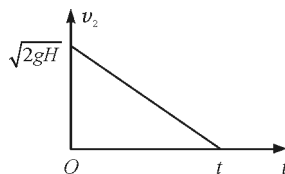


图4  $v_2-t$ 图

### 3 结束语

本文分别从伯努利方程和能量守恒、平均值法来巧解“水池排水时间”的问题<sup>[2]</sup>.在物理教学中,多和学生进行这样的分析讨论,无论对于提升学生的理论水平、分析能力,还是对于提升学生物理学习的兴趣,都能起到较大的推动作用.

#### 参考文献

- 漆安慎,杜禅英.力学[M].北京:高等教育出版社,2005. 393~399
- 臧立志.线性函数的平均值在高中物理中的应用[J].物理教师,2010,37(19):57~58

$$\epsilon_{\text{感}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

其中负号表示阻碍的意思,确定了动生电动势的方向.

现在对动生电动势数学公式做一点变形,如图1所示,导体棒 $ab$ 位于 $xOy$ 平面内,以速度 $v$ 沿 $x$ 轴正向运动,磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场沿 $z$ 轴正向,产生的动生电动势为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{动}} &= \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = \\ & \int_a^b \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}) = \frac{d}{dt} \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3) \end{aligned}$$

这样我们看到,动生电动势和感生电动势的大小在公式形式上保持了一致.通过观察式(3),发现此时的面积是运动导体相对磁场运动时所扫过磁场的面积.

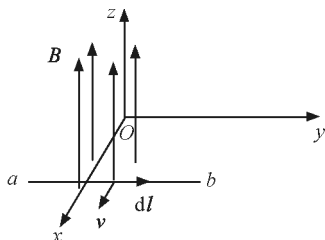


图1 导体棒在均匀磁场中运动

## 2 从电磁场的洛伦兹变换看动生电动势和感生电动势之间的联系

我们在一个具体情况下来讨论动生电动势和感生电动势的相对性.在 $x > 0$ 处存在沿 $z$ 轴向上的均匀磁场 $\mathbf{B}$ ,导体棒 $ab$ 以速度 $v$ 沿 $x$ 轴运动,导体棒上会出现电动势.

如图1所示,以坐标系为参考系,线圈上将产生

动生电动势

$$\epsilon_{\text{动}} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = Bv |ab| \quad (4)$$

以导体棒为参考系,根据电磁场的洛伦兹变换<sup>[2]</sup>,在动参考系中除存在磁场外,还存在电场 $E'_y = -\gamma vB$ (负号代表方向 $b \rightarrow a$ ).其中 $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ .

这样可以计算感生电动势

$$\epsilon_{\text{感}} = \int_a^b E'_y \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \gamma vB |ab| \quad (5)$$

式(5)中 $\mathbf{j}$ 为 $y$ 方向的单位矢量,由式(5)的结果可以看到,感应电动势在不同的参考系下有不同的表现形式,两者之间差着一个因子 $\gamma$ .在宏观低速情况下, $v \ll c$ ,此时 $\gamma$ 约为1<sup>[2]</sup>.因此,在一定程度上区分动生电动势和感生电动势只有相对意义.

## 3 讨论

我们从非静电力和电磁场的洛伦兹变换两个角度,说明了动生电动势和感生电动势的一致性.所以,我们还可以做一些探讨.比如:如果说发生电磁感应现象的条件是磁通量的变化,那么关键是要选取好闭合回路,要以导体实际扫过磁场的面积为准.如果把部分导体切割磁感线作为一个条件也无可厚非.因为区分动生电动势和感生电动势只有相对意义,尤其高中阶段,我们没有必要在此方面过度教学.

### 参考文献

- 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 北京人民教育出版社, 1979. 19 ~ 23
- 高炳坤. 导出“电磁场的相对论变换”的一种简便方法[J]. 大学物理, 1995, 14(8): 47 ~ 48

# Relationship Between Motional Electromotive Force and Induced Electromotive Force

Zhang Benteng

(Yunnan Yuxi Hengshui Experimental Middle School, Yuxi, Yunnan 653100)

**Abstract:** After appropriately constructing an "area", the dynamic electromotive force and the induced electromotive force are consistent in form, and how to construct such an "area" is given. Through the Lorentz transformation of the electromagnetic field, the connection between the two is explained again from the perspective of the relativity of motion.

**Key words:** dynamic electromotive force; induced electromotive force; Lorentz transformation; relationship