

# 均匀带电圆环电势的空间分布

罗志娟 何艳 喻莉

(空军预警学院基础部 湖北 武汉 430019)

(收稿日期:2020-04-08)

**摘要:**利用分离变量法和 $\delta$ 函数的性质计算出带电圆环的电势的函数表达式,并通过表达式得出轴线和圆心处的电势,加深对物理边界问题的理解.

**关键词:**带电圆环 电势 分离变量法  $\delta$ 函数

## 1 引言

均匀带电圆环是电磁学理论及应用中的基本模型,根据电势的叠加非常方便地计算其轴线上任意点的电势,但是对于空间任意点的电势,数学处理上有一定的困难,文献[1]利用MATLAB计算均匀带电圆环在空间任意点的电势分布,文献[2]利用第一类全椭圆积分计算了均匀带电圆环电势的空间分布,文献[3]利用椭圆积分和数学软件对均匀带电圆环电势和电场进行了研究.

本文避开复杂的数学积分计算,利用分离变量法和 $\delta$ 函数性质得出均匀圆环的空间电势分布的函数表达式,将轴线和圆心处对应的参数代入表达式中,得出轴线和圆心处的电势,与电磁学的结论一致,在利用分离变量中主要利用物理的边界条件,从而加深了学生对物理边界问题的理解.

## 2 均匀带电圆环在空间任意点的电势表达式

有一均匀带电细圆环,半径为 $a$ ,总电荷量为 $Q$ ,取球坐标系,坐标原点在环心,而圆环则处在赤道面上,如图1所示,分析得出除了圆环上各点外,电势处处满足拉普拉斯方程,并且空间任意一点 $(r, \theta, \varphi)$ 的电势 $u$ 与 $\varphi$ 无关.

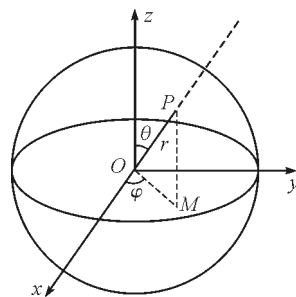


图1 球坐标系下的均匀带电圆环

设电荷密度分布函数为 $\rho(r, \theta)$ ,则

$$\rho(r, \theta) = C\delta(r - a)\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

常数 $C$ 由圆环上的总电荷求出

$$\iiint C\delta(r - a)\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = Q$$

则

$$C = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

可以写出电势 $u$ 所满足的定解问题

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) =$$

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r - a) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$u|_{\theta=0} \text{ 有界} \quad u|_{\theta=\pi} \text{ 有界} \quad (2)$$

$$u|_{r=0} \text{ 有界} \quad u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (3)$$

由 $\delta$ 函数的性质可知,当 $r \neq a$ 时,式(1)退化为拉普拉斯方程,这样,再由分离变量法结合式(2)和式(3)的边界条件,可以得到

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) & r < a \\ \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (4)$$

考虑到  $\delta$  函数应该是间断函数的导数, 所以电势在球面  $r=a$  上一定是连续的

$$u(r, \theta) \Big|_{r=a+0} = u(r, \theta) \Big|_{r=a-0} = 0 \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得

$$A_l a^l = B_l a^{-l-1} \quad (6)$$

而  $\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}$  在球面  $r=a$  上一定是不连续的, 它在球

面  $r=a$  两侧的跃变可以由式(1)对  $r$  积分得到

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a-0} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a+0} = -\frac{Q}{2\pi a^2 \epsilon_0} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

将  $\delta$  函数也按勒让德多项式展开有

$$\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(0) P_l(\cos \theta) \quad (8)$$

由式(4)、(7)和(8)得

$$A_l l a^l + B_l (l+1) a^{-l} = \frac{(2l+1)Q}{4\pi\epsilon_0} P_l(0) \quad (9)$$

因为  $P_{2l+1}(0) = 0$

所以

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \cdot P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} \cdot P_{2l}(0) P_{2l}(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (10)$$

从结果中只含有偶次勒让德多项式, 反映了静电势在赤道面反射不变性, 即

$$u(r, \theta) = u(r, \pi - \theta)$$

### 3 带电圆环轴线上的电势

轴线上取式(10)中

$$\theta = 0$$

$$P_{2l}(\cos \theta) = P_{2l}(1) = 1$$

$$P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!}$$

代入式(10)得以下结论.

当  $r < a$  时

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \cdot$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2}}$$

当  $r > a$  时

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \cdot$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l} l! l!} =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \frac{a}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2}}$$

合并上面的结论, 则在轴线上的电势为

$$u = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2}}$$

在圆心处取式(10)中

$$r = 0$$

则式(10)中求和项只剩下  $l=0$

$$P_{2l}(0) = P_{2l}(\cos \theta) = 1$$

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

该结论与电磁学中讨论的结果是一致的.

### 4 结束语

本文主要利用分离变量法求出带电圆环在空间任意点的电势, 避免了复杂的积分过程, 在利用分离变量的过程中主要是利用物理问题的本质边界条件的应用, 这样能加深学生对边界条件的理解.

### 参考文献

- 1 许瑞珍, 蔡声镇. 均匀带电圆环在空间任意点电势分布的计算[J]. 福建师范大学学报, 2007(4): 70 ~ 73
- 2 马堃, 褚园. 均匀带电圆环电势的空间分布[J]. 黄山学院学报, 2010(5): 25 ~ 27
- 3 于慧, 张素花, 安海龙, 等. 均匀带电细圆环的电势和电场强度的空间分布[J]. 河北工业大学成人教育学院学报, 2007(4): 30 ~ 34

# 在大学物理课程中讲授黑洞照片拍摄的探讨

解希顺

(东南大学物理学院 江苏 南京 210000)

(收稿日期:2020-03-10)

**摘要:**探讨了如何在大学物理课程中介绍史上第一张黑洞照片并进行相关教学的设计和方法.初步的实践表明,对基础良好的理工科本科生,在已具备一定的力学、光学等知识的情况下,讲授黑洞照片拍摄的基本原理和大致形状是可行的.作者希望通过本文的探讨,与同行交流切磋,进一步提高此案例教学的水准,并结合相关教材的修订,将此以适当方式纳入新版教材中.

**关键词:**大学物理 黑洞照片 教学设计

## 1 史上第一张黑洞照片

2019年4月10日,人类历史上第一张黑洞照片在全球六地(比利时布鲁塞尔、智利地亚哥、中国上海、中国台北、日本东京、美国华盛顿)同时发布.照片中央是室女座超巨椭圆星系M87中心的超大质量黑洞,其质量是太阳的65亿倍,距离地球大约5500万光年.黑洞的周围有一个明亮的环状结构,是绕黑洞高速旋转的吸积盘(图1).

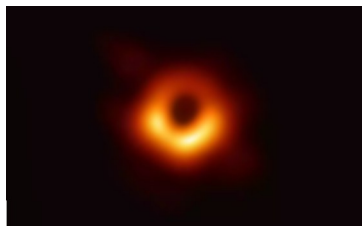


图1 史上第一张黑洞照片

人们一直好奇黑洞究竟长什么样?这张“照片”的问世,在物理界乃至整个科学界引起了极大的反响.因为它是对爱因斯坦广义相对论的又一极限验证,也是人类在迈向宇宙的漫漫征途中,竖起的又一里程碑.

## 2 在大学物理中如何讲授黑洞照片的拍摄

大学物理课程是理工科大学生的一门重要的基础课.在大学物理中讲授现代物理的新知识、新发展、新应用,一直是物理教学中的一个重要的改革方向和追求目标.当然,由于本科学生物理基础、物理课时等原因的限制,在大学物理课程中讲授现代物理知识通常有一定的困难.如何在大学物理中讲好黑洞照片的拍摄,是一值得探讨的问题.对此,我们做了一点尝试,在这里与同行交流与讨论.

## Spatial Distribution of Electric Potential of a Uniform Charged ring

Luo Zhijuan He Yan Yu Li

(Department of the Basics, Air Force Early Warning Academy, Wuhan, Hubei 430019)

**Abstract:** The electric potential function expression of the charged ring is calculated by the method of separation of variables and  $\delta$  function, and derive the electric potential in the spool thread and the center of the ring, deepening to understand the physical boundary problem.

**Key words:** charged ring; electric potential; the method of separation of variables;  $\delta$  function