



一道动生电动势为电容器充电过程的严格解^{*}

李俊鹏 琚鑫 马朝华

(北京市海淀区教师进修学校 北京 100195)

(收稿日期:2020-04-10)

摘要:含电容器“单棒+导轨+电阻”模型是一类常见模型,在考查中多定性分析导体棒的运动情况,定性画出导体棒的 $v-t$ 图像,计算棒的收尾速度.为进一步挖掘该模型的教学价值,将从高观点视角,运用微积分知识,定量研究和讨论相关问题.通过理想化处理,与常规解法形成一致性的结论,深化对该模型的认识.

关键词:单棒导轨模型 电容器 收尾速度 理想化处理

1 引言

含电容器“单棒+导轨+电阻”模型是一类常见模型,在考查中多定性分析导体棒的运动情况,定性画出导体棒的 $v-t$ 图像,计算导体棒的收尾速度等.往往学生能解得正确结果,但仍会提出很多疑问,如导体棒需要经过多长时间才能达到稳定速度?稳定速度为什么与电路中电阻 R 无关?电阻 R 在电路中起什么作用?导体棒变速滑动过程中有没有电磁能量的辐射等等.这些都在考验着教师对该部分知识的处理能力,本文就这些问题做些探讨,希望能回应以上疑惑.

2 分析

2.1 定性分析

如图1所示,水平面上有两根足够长的光滑平行金属导轨,两导轨间距为 L ,电阻可忽略不计.在导轨之间接有阻值为 R 的定值电阻和电容为 C 的不带电的电容器,导体棒质量为 m ,电阻忽略不计,并与导轨接触良好.整个装置处于方向竖直向下、磁感应强度为 B 的匀强磁场中.不考虑导体棒与轨道之间的摩擦和空气阻力.假设导轨长度足够长,磁场的范围也足够大.现给导体棒一个水平向右且足够大的初速度 v_0 .

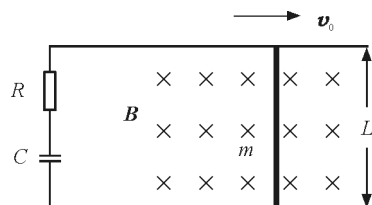


图1 实验装置示意图

我们先来对整个过程做一个定性的分析:由于导体杆向右运动,切割磁感线产生感应电动势,然后给电容器充电,随着电容器所带电荷量的增加,电容器极板间的电势差越来越大.直到电容器两端的电势差等于导体棒的动生电动势与电阻 R 两端的电势差之差,电路中不再有电流,充电结束.再看导体棒,由于导体棒所受安培力与导体棒的速度方向相反,因此导体棒将做减速运动,直到电容器充电完成,电路中电流为零,导体棒不再受安培力而保持匀速直线运动.

2.2 定量分析

从上述定性分析来看,物理情景清晰,但是却很难回答一些问题,比如要经过多长时间才能使电容器充电完成?这个过程中导体棒运动的位移是多大?于是,我们有必要对上述问题进行定量分析.

设某时刻 t 时,导体棒的速度为 v ,回路中电流为 i ,电容器某一极板上所带电荷量为 q ,则根据基尔霍夫方程有

^{*} 北京市海淀区教育科学“十三五”规划重点关注课题“教师教材处理能力的实践研究”的阶段性成果,项目编号:HDGH20190035;“北京市中小学名师发展工程”项目论文.

作者简介:李俊鹏(1973-),男,中教高级,主要从事物理教学研究及课程开发和建设工作.

$$iR = BLv - \frac{q}{C} \quad (1)$$

再根据牛顿第二定律,有

$$-BiL = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

这就是我们解决这个问题的两个方程.下面我们求解上述微分方程组.将电流的定义式 $i = \frac{dq}{dt}$

代入式(1),然后再对式(1)两端对时间 t 求导,得

$$R \frac{d^2q}{dt^2} = BL \frac{dv}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} \quad (3)$$

再将式(2)代入式(3),整理后得

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{B^2L^2}{mR} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dq}{dt} = 0$$

再结合初始条件: $t=0$ 时,电容器极板所带电荷量 $q(0) = 0$,电路中瞬时电流 $\frac{dq(0)}{dt} = \frac{BLv_0}{R}$,于是解得

$$q(t) = \frac{mBLCv_0}{CB^2L^2 + m} \left(1 - e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} \right) \quad (5)$$

将式(5)对时间 t 求导,得到电流 i 随时间的演化关系

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \frac{BLv_0}{R} e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} \quad (6)$$

再将式(6)代入式(2)得

$$-\frac{B^2L^2v_0}{R} e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} = m \frac{dv}{dt}$$

结合初始条件 $v(0) = v_0$,得

$$v(t) = \frac{CB^2L^2 e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} + m}{CB^2L^2 + m} v_0 \quad (7)$$

再对 v 从 0 到时刻 t 积分,得位移

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{mv_0}{(CB^2L^2 + m)^2} \left[(CB^2L^2 + m)t + C^2B^2L^2R \left(1 - e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} \right) \right] \quad (8)$$

上述表达式中方括号里的第1项是一个线性项,代表匀速直线运动,第2项是一个 e 指数的增加项,随着时间的推移,越来越趋近于定值 CB^2L^2R .可见上述运动越来越趋近于一个匀速直线运动.

至此,我们完成了上述问题的全部数学推导,下面我们就最终的稳态以及达到稳态所需时间和通过的位移进行讨论.

3 理想化处理

首先,稳态对应着充电结束,即电流 $i = 0$,由式(6)可知,此时应对应 $t = +\infty$.即电容器要用无限长的时间才能完成充电.分别将 $t = +\infty$ 代入式(7)和式(8),发现式(8)是发散的,而式(7)可得收尾速度

$$v(\infty) = \frac{m}{CB^2L^2 + m} v_0 \quad (9)$$

即导体棒会越来越趋近于这一速度.

如何理解上述物理过程呢?我们可以这样想:随着电容器充电的不断进行,电容器两端电势差 $\frac{q}{C}$ 越来越大,电路中电流 i 越来越小,导体棒的动生电动势 BLv 越来越小,结果就是 $iR + \frac{q}{C}$ 越来越接近于 BLv ,那么电路中使电荷产生定向移动的力就越来越小,那么电容器充电就越来越难.

我们再来计算达到稳态时,电容器极板所带电荷量 Q 为

$$Q = \frac{mBLCv_0}{CB^2L^2 + m} \quad (10)$$

此时电容器储存的电能 E 为

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{m^2B^2L^2Cv_0^2}{2(CB^2L^2 + m)^2} \quad (11)$$

整个过程中电阻 R 上产生的电热 $Q_{\text{热}}$ 为

$$Q_{\text{热}} = \int_0^{+\infty} i^2(t) R dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{BLv_0}{R} e^{-\frac{CB^2L^2 + m}{mCR}t} \right)^2 R dt = \frac{mCB^2L^2v_0^2}{2(CB^2L^2 + m)}$$

这与用能量守恒定律 $Q_{\text{热}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 - E$ 的计算结果一致.可以形式上引入折合质量 $\mu = \frac{mCB^2L^2}{CB^2L^2 + m}$,上式可以写成非常简洁的形式 $Q_{\text{热}} = \frac{1}{2}\mu v_0^2$,但不能说整个过程中没有电磁能产生,在充电过程中,电容器两极板间电场强度随时间变化,一定有磁场产生,只是这个磁场能是局域的,不能像电磁波那样传播出去,因此在最终稳态的情况下,电场不再随时间变化,所以不存在磁场能.

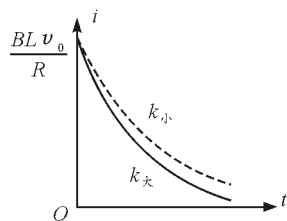
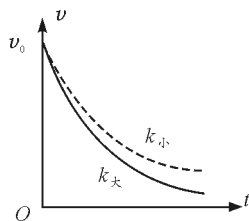
4 意义解释

下面,我们对电流 i 和速度 v 随时间变化的情况,做一些形象的定性描写.我们来绘制不同参数下 $i-t$ 图像和 $v-t$ 图像.根据式(6)和(7)可知,涉及的

物理量有 R, C, B, L, m 和 v_0 , 由量纲可知, CB^2L^2 具有质量的量纲, RC 具有时间的量纲, 因此 RC 也常被称作时间常数。

设 $\frac{BLv_0}{R} = 1, CR = 1, CB^2L^2 = km$, 本电路的时间常数为

$\frac{mRC}{CB^2L^2 + m} = \frac{RC}{1+k}$, 与传统的 RC 电路时间常数相比, 增加了导体棒和外磁场性质的影响, 分别画出不同 k 值下的 $i-t$ 图像如图 2 所示和 $v-t$ 图像如图 3 所示。

图 2 $i-t$ 图图 3 $v-t$ 图

在初始电流 $\frac{BLv_0}{R}$ 和时间常数 CR 一定的情况

下, k 值越大, 通过 $i-t$ 图像可知, 电流减小到零所用时间就越短, 曲线与横轴所围面积越来越小, 即电容器最终的带电荷量越来越小。通过 $v-t$ 图像可知, k 值越大, 速度减小得越快, 并且根据式(9)可知收尾速度 $v(\infty) = \frac{1}{1+k}v_0$, 可见 k 值越大, 收尾速度越小。

下面再就一个具体的情况进行计算:

取 $R = 0.1 \Omega, C = 1 \text{ F}, B = 0.1 \text{ T}, L = 0.5 \text{ m}, m = 0.02 \text{ kg}, v_0 = 2 \text{ m/s}$, 利用式(9)可知收尾速度为 1.78 m/s , 再计算当速度为 1.80 m/s 时所需时间的数值解为 0.2 s , 导体杆会在很短的时间内非常接近收尾速度。

参考文献

- 1 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980. 414 ~ 421
- 2 同济大学应用数学系. 高等数学(第5版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 266 ~ 267
- 3 郑泰玉, 王文涛. 高观点下的中学物理问题探讨(第2版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018. 237 ~ 246

(上接第 64 页)

生亲身感受到物理源于生活并解决生活问题的学科魅力。同时, 能够为偏远的边疆少数民族地区的物理教学资源的开发和利用提供参考价值。在教学过程中, 参考了 5E 教学法的教学设计理念和教学依据, 教师创设学生能够接触到的真实生活情境, 并以学生认知中的冲突作为新课的引入, 这种新的教学模式, 既可以提高学生的学习兴趣, 又可以通过认知冲突激发学生的求知欲^[8]。通过组织学生进行实验探究, 提高学生的动手能力与团队协作能力, 打破了传统的“填鸭式教学”, 让新课程标准倡导的科学素养在实际教学中得以实现。5E 教学法中的“解释”“拓展”阶段, 能够使学生亲自动手探究自己所感兴趣的知识, 并能够用自己的语言总结出观察到的实验现象和得到的实验结论, 把教学目标以一种可操作的方式表现出来。在整个教学过程中, 对学生的学习结果进行及时有效的反馈, 在每个环节中都穿插着正式客观的评价, 及时地让学生知道学习过程中的错误和不足, 鼓励学生寻找正确的学习和科学探究途径。

根据少数民族学生的生活特点, 对生活中随处可见的民族乐器、民族儿童玩具、少数民族自制家具等物品的利用, 为教学条件相对落后的边疆少数民族地区物理教学资源的开发和利用提供了新的参

考, 结合 5E 教学法的教学理念进行多过程的教学设计, 综合培养学生的团结协作能力和动手操作能力, 发展学生的科学素养, 为相对落后的彝族自治区域的中学物理教学提供了新的方法和途径。

参考文献

- 1 李娜, 刘艳超, 杨薇. 基于 5E 模式的中学物理教学研究——以《物体的沉浮条件及应用》为例[J]. 物理教学探讨, 2014, 32(05): 5 ~ 8
- 2 颜国英, 张皓晶, 郑原琛, 等. 5E 教学法在中学物理重心概念教学中的探讨[J]. 物理教师, 2018(50): 27 ~ 29
- 3 360 浏览器[EB/OL]. <http://www.musicool.com/news/html/2010-2/20102115443025039955.html>. 2020-06-02/2010-2-1
- 4 360 浏览器[EB/OL]. www.kongfz.cn. 2020-06-02
- 5 Robyn M. Gillies, Mary Rafter. Using visual, embodied, and language representations to teach the 5E instructional model of inquiry science[J]. Teaching and Teacher Education, 2020, 87
- 6 方盛, 周洪伟. 运用出声思考法探查物理前概念教学的实践[J]. 丽水学院学报, 2015, 37(02): 95 ~ 99
- 7 孙春成, 于路军. 高中物理拓展性实验教学的实践研究[J]. 物理通报, 2017(09): 65 ~ 68
- 8 曹艳霞. 激发和满足学生学习欲望的策略研究[J]. 小学教学参考, 2015(27): 23 ~ 24