变转动惯量的刚体转动问题分析*

邢　杰　张自力　赵长春　郝会颖

［中国地质大学(北京)数理学院　北京　100083］

(收稿日期:2020-05-24)

摘　要:从一道变转动惯量刚体的转动问题出发,探讨了如何利用角动量定理来处理变转动惯量的刚体转动问题,并给出了等效转动惯量的证明和正确理解.

关键词:刚体　转动惯量　角动量定理　力矩　角速度

1　变转动惯量问题的提出

在大学物理教学中,刚体是一个非常典型的质点系,由于刚体的特殊性,质点系的运动学规律和动力学规律都和一般的质点系不同.转动定律是描述刚体转动的基本动力学规律之一,在分析刚体运动时,一般我们遇到的问题都是刚体的转动惯量不变,直接讨论外力矩对角加速度的影响.这种处理方式对于孤立刚体来说是没有问题的,因为刚体的质量分布不随运动改变,转动惯量是个常数.但是当处理多个刚体的系统时,刚体和刚体之间的距离可能会随运动改变,因此转动惯量就成为一个变量,这时就不能用 $\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\alpha}$ 来处理问题了,而应该从角动量定理 $\boldsymbol{M}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$ 出发,将 $\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}$ 代入,得

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\omega}+J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

唐军杰等人之前研究过变转动惯量刚体定轴转动的实验研究和数值模拟,在他们的实验中,转动惯量的变化都是因为附加机构质量或质量的分布发生改变引起的[1,2].其实,在最简单的两刚体系统中,转动惯量就已经在变化了,如例1所示.

【例1】一定滑轮固定于O点,定滑轮可以看成是一个质量均匀分布的圆盘,圆盘半径为R,质量为m_1.绳子一端固定并绕在轮轴上,另一端挂一质量为m_2的物体,自然下垂.绳子的长度不变,质量不计,绳与滑轮之间无相对滑动,求滑轮转动的角加速度.

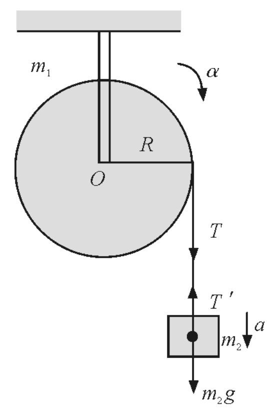

图1　滑轮定轴转动

在这个问题中,一般参考书的解法有两种,第一种:隔离法,第二种:整体法.我们先给出这两种方法.

隔离法:将滑轮m_1和物体m_2分别做受力分析,然后列动力学方程.对m_1来说,滑轮做定轴转动,利用转动定律$M=J_{m_1}\alpha$,得到

$$TR=J_{m_1}\alpha \tag{1}$$

对于m_2,可以看成质点,在本身重力和向上的拉力作用下做竖直向下的直线运动.利用牛顿定律,有

$$m_2g-T'=m_2a\quad(T=T') \tag{2}$$

再根据运动学关系

$$a=R\alpha \tag{3}$$

式(1)～(3)联立,可以求出角加速度

$$\alpha=\frac{m_2gR}{J_{m_1}+m_2R^2}$$

整体法:将m_1和m_2看成一个整体,这个系统所受的合外力矩是m_2gR,它们在外力矩的作用下做

* 中国地质大学(北京)2020年度本科教育质量提升计划建设项目,项目编号:JGYB202043;国家自然科学基金项目,项目编号:11974318

作者简介:邢杰(1973-),女,博士,副教授,主要从事大学物理教学和光电功能材料方面的研究.

定轴转动，根据 $M=J_{总}\alpha$，这里转动惯量

$$J_{总}=J_{m_1}+J_{m_2}=\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2 \tag{4}$$

代入后，可得

$$\alpha=\frac{m_2gR}{J_{m_1}+m_2R^2}$$

这个结果和隔离法的结果一致.

2　等效转动惯量的证明与结论

整体法的处理方法在一些刚体的轮轴问题中经常能看到[1~4]，但是仔细考察后发现式(4)中 m_2 的转动惯量并不好理解. 在整个运动过程中，m_2 相对于转轴的位置总在变化，为什么可以等效成 m_2R^2 这一常量表达呢？为了解释清楚这个问题，我们画了图 2.

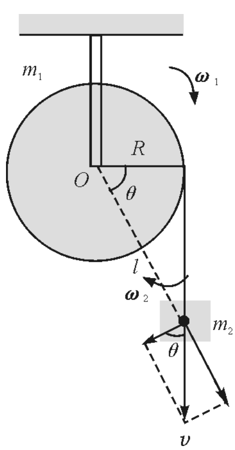

图 2　转动惯量分析

这个复合体系中有两个刚体，其中一个刚体 m_2 相对于转轴的位置不断随时间变化，因此我们把总角动量 L 写成两部分，即

$$L=J_{m_1}\omega_1+J_{m_2}\omega_2 \tag{5}$$

注意这里 ω_1 和 ω_2 分别代表 m_1 和 m_2 绕转轴的角速度，它们大小不同但方向相同. 将式(5)代入到角动量定理 $M=\dfrac{dL}{dt}$ 中，有

$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d(J_{m_1}\omega_1+J_{m_2}\omega_2)}{dt}$$

其中圆盘 m_1 的转动惯量 J_{m_1} 是一个常数，其余参量(ω_1，J_{m_2}，ω_2)都是时间的函数，于是有

$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d(J_{m_1}\omega_1+J_{m_2}\omega_2)}{dt}=J_{m_1}\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{dJ_{m_2}}{dt}\omega_2+J_{m_2}\frac{d\omega_2}{dt} \tag{6}$$

根据图 2 和运动学关系，可以得到 m_2 的转动惯量 J_{m_2} 和角速度 ω_2

$$J_{m_2}=m_2l^2=m_2\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2 \tag{7}$$

$$\omega_2=\frac{v\cos\theta}{l}=\frac{v\cos\theta}{\dfrac{R}{\cos\theta}}=\frac{v(\cos\theta)^2}{R}=\omega_1(\cos\theta)^2 \tag{8}$$

这里 v 表示 m_2 的运动速度，将式(7)和式(8)代入式(6)中，有

$$\begin{aligned}M&=\frac{dL}{dt}=J_{m_1}\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{dJ_{m_2}}{dt}\omega_2+J_{m_2}\frac{d\omega_2}{dt}=\\&J_{m_1}\frac{d\omega_1}{dt}+2m_2R^2\frac{\sin\theta}{(\cos\theta)^3}\frac{d\theta}{dt}\omega_1(\cos\theta)^2+\\&m_2\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2\left[\frac{d\omega_1}{dt}(\cos\theta)^2-2\omega_1\cos\theta\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]=\\&J_{m_1}\frac{d\omega_1}{dt}+2m_2R^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dt}\omega_1+m_2R^2\frac{d\omega_1}{dt}-\\&2m_2R^2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dt}\omega_1=J_{m_1}\frac{d\omega_1}{dt}+m_2R^2\frac{d\omega_1}{dt}=\\&(J_{m_1}+m_2R^2)\frac{d\omega_1}{dt}\end{aligned} \tag{9}$$

令 $\dfrac{d\omega_1}{dt}=\alpha$，并将 $J_{m_1}=\dfrac{1}{2}m_1R^2$ 代入式(9)，得

$$M=(J_{m_1}+m_2R^2)\alpha=\left(\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2\right)\alpha \tag{10}$$

式(10)和前面整体法中转动定律形式是一致的. 经过分析，我们看到对于运动的 m_2 来说，其转动惯量 J_{m_2} 和角速度 ω_2 都是时间的函数，或者说 J_{m_2} 和 ω_2 都是角度 θ 的函数，如式(7)、(8)所示. 由式(9)推导过程可知，在对时间 t 求导过程中，J_{m_2} 求导项和 ω_2 求导项中的一部分互相抵消，这是因为 J_{m_2} 增大时 ω_2 在减小，最后 m_2 的角动量随时间的变化率只剩下一项 $m_2R^2\dfrac{d\omega_1}{dt}$. 式中的 m_2R^2 只是一个等效的转动惯量，并不代表实际 m_2 对转轴的转动惯量 J_{m_2}.

以上是从物理学角度导出了例 1 这一典型运动模型的运动特点和规律，式(10)与定轴转动刚体的转动定律 $M=J\alpha$ 比较可得以下结论：

图 1 所示重物滑轮组合系统在重物从静止开始自然下落过程中，虽然重物 m_2 对转轴的转动惯量 J_{m_2} 以及系统的总转动惯量 $J_{总}$ 在增大，但就滑轮转动的角速度 ω_1 和角加速度 α 而言，该系统可等效为一个把

m_2 固定于滑轮边缘,具有不变的等效转动惯量 $J_{等效}=\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2$,且以角速度 ω_1 做定轴转动的系统.

在普通物理学课程中,一般不定义也不讲解"等效转动惯量"的概念,而在机械原理和机电一体化专业课程中,严格定义讲解了"等效转动惯量"的概念并用于机电工程设计中[5]. 其中"等效转动惯量"定义的实质和规则是:一个由若干个移动(平动)部件和转动部件构成的系统,其各部件动能之和等于一个等效的定轴转动刚体的转动动能,这个刚体的转动惯量即为等效转动惯量.

按照以上定义和规则,可求出图 1 所示重物滑轮系统的等效转动惯量,过程为

$$E_k=E_{k_1}+E_{k_2}=\frac{1}{2}J_{m_1}\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2v^2=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2(\omega_1R)^2=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2\right)\omega_1^2=\frac{1}{2}J_{等效}\omega_1^2$$

即有
$$J_{等效}=\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2$$

这就从不同学科的角度证明了"等效转动惯量"概念的正确性和合理性.

3 结束语

有些教材和文献直接用公式 $M=(J_{m_1}+m_2R^2)\alpha$ 来进行动力学计算,而且未对式中 m_2R^2 做任何注释[1,2,4],这样很容易让学生误读,学生以为 $J_{m_1}+m_2R^2$ 就是刚体系定轴转动的实际总转动惯量,而且总转动惯量是不变的. 甚至一些教师也这样认为. 笔者翻看了近几年的大学物理教材,一些教材在处理这类轮轴问题时,仍然采用隔离法求解,很少用等效的方法[6~8],可能也是怕引起误解.

在物理问题研究中为了简化问题,有很多等效思想的应用,但是等效不能想当然,所有的等效原理都是需要严格的数学证明和实践检验的. 在等效过程中,我们要思考,为什么可以等效,而不是盲目跟从,这样才能正确地利用等效的思想解决新的问题. 这个问题的分析过程也让我们看到了在处理变转动惯量的问题时,一般 $\boldsymbol{M}=J\boldsymbol{\alpha}$ 不再成立,而应该使用更为基本的角动量定理 $\boldsymbol{M}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ 来处理问题. 这就类似于牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 在处理质量变化的相对论问题时不再有效,因为质量 m 不再是一个常量,这个时候在处理变质量问题时,应该用更普适的动量定理 $\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ 来分析问题.

参 考 文 献

1 唐军杰,王爱军,赵昆,等. 变转动惯量刚体定轴转动的数值研究 [J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2012,41(2):187 ~ 190

2 唐军杰,王爱军. 变转动惯量刚体转动定律实验研究 [J]. 大学物理实验,2017, 30(6):10 ~ 12

3 陈信义. 大学物理教程[M]. 北京:清华大学出版社,2005

4 鲁玉明. 应用转动定律分析质点和刚体组合的运动 [J]. 物理通报,2011(4):9 ~ 10

5 曹龙华. 机械原理[M]. 北京:高等教育出版社,1986,252

6 张三慧. 大学物理学 [M]. 北京:清华大学出版社,2001

7 吕金钟. 大学物理简明教程[M]. 北京:清华大学出版社,2006

8 钟锡华,周岳明. 大学物理通用教程[M]. 北京:北京大学出版社,2010

Analysis on Rigid Body Rotation Issue With Variable Moment of Inertia

Xing Jie Zhang Zili Zhao Changchun Hao Huiying

[School of Science, China University of Geosciences(Beijing),Beijing 100083]

Abstract:Starting from the problem of rotation of a rigid body with moment of inertia, this paper discusses how to use the theorem of angular momentum to deal with the rotation of a rigid body with variable moment of inertia, and gives the proof and correct understanding of the equivalent moment of inertia.

Key words: rigid body; moment of inertia; theorem of angular momentum; torque; angular velocity