



单摆实验的数值理论分析*

李群 尧莉 章世恒

(东华理工大学理学院 江西南昌 330013)

(收稿日期:2020-06-08)

摘要:采用理论数值分析的方法对单摆进行研究,结果发现单摆由小角到大角的摆动过程中振动图像在由线性(小角)到非线性(大角)缓慢变化,角度越大非线性现象越明显;基于第一类完全椭圆积分和数值积分的方法计算周期,结果证明周期与摆长、角振幅相关;不同摆长的周期分析结论是摆长较小时有利于实际实验测量,其带来的相对误差较摆长较大时更小.为实际操作方便角振幅(摆角)可适当增加,对实验结果不会引入较大误差.

关键词:单摆 非线性 周期

1 引言

单摆是一种理想的物理模型,由理想化的摆球和摆线组成.在满足偏角小于等于 5° 的条件下,单摆的运动近似为简谐振动,因此,单摆经常作为研究简谐振动的基本内容^[1].当摆角大于 5° 时,单摆的运动变得复杂,其运动方式也由线性走向非线性^[2,3],大量研究分析单摆运动的论文见诸于各类期刊上^[4~8].

单摆实验作为最基础的内容在大学物理实验课程中开设^[9,10],既可作为简谐运动的方式测定本地重力加速度,也可通过大角摆动的动力学分析作为学习非线性物理的重要基础.因此,单摆实验成为连接基础物理与近代物理(非线性物理)的桥梁,通过单摆我们既能了解最简单的振动方式简谐振动,又能通过初始条件的变化学习非线性动力学的知识.

本文通过讨论单摆由线性走向非线性的变化,主要方法采用数值理论模拟分析线性谐振动和非线性谐振动的图像变化;角振幅的变化引起的周期变化以及不同摆长对应的周期变化,通过分析这些条件为单摆实验中取得理想的结果提供理论借鉴.

2 实验原理

如图1所示单摆,小球的质量为 m ,其质心到悬挂点 O 的距离为 l (摆长).偏离平衡位置 θ 角时,作

用在小球上的切向力的大小为 $mg \sin \theta$,它总指向平衡点 O' .当 θ 角很小时,有 $\sin \theta \approx \theta$,切向力的大小为 $mg\theta$.质点动力学方程为

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

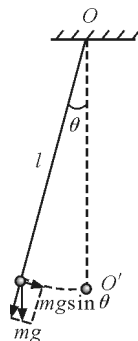


图1 单摆

当 $\theta \leq 5^\circ$ 时,为简谐运动方程的动力学微分方程,式(1)的通解为

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3)$$

单摆在摆角很小、无阻尼时的摆动为简谐振动,简谐振动是一切线性振动系统的共同特性,它们都以自己的固有频率做正弦振动.

当 $\theta > 5^\circ$ 时, $\sin \theta \approx \theta$ 不再成立,式(1)为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta = -\omega_0^2 \sin \theta \quad (4)$$

* 国家自然科学基金资助项目,基金编号:11704066;江西省教育厅科技计划项目,项目编号:GJJ160576

作者简介:李群(1970-),男,硕士,高级实验师,主要研究方向为非线性物理,物理理论与实验教学.

此时的微分方程不再是线性方程,无严格解析解^[1,2].

3 简谐近似和非线性的振动图像比较

图2为摆长 $l=1\text{ m}$ 时角振幅分别为 $3^\circ, 10^\circ, 30^\circ$ 时的时间(t)-位移(y)图像,图中实线为简谐振动图,虚线为数值模拟振动曲线图,点实线为同一时刻

两者差值曲线图.图2中可见当角振幅为 3° 时,数值模拟与简谐振动曲线吻合得很好,可视为简谐振动;角振幅为 10° 时,两条曲线在很短时间就不再重合,此时已不能视为简谐振动;角振幅增加至 30° 时数值模拟曲线已明显偏离简谐振动曲线,即大角摆动已非线性谐振动.

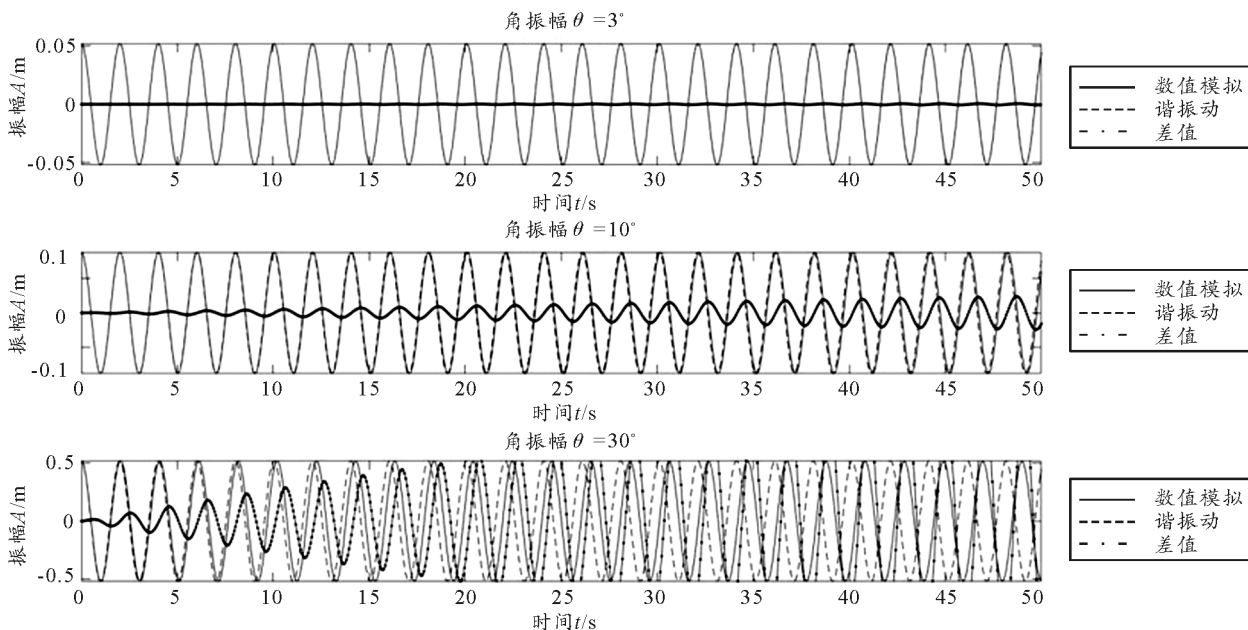


图2 不同角振幅时的振动曲线

4 大角时的振动周期计算

大角摆动的微分方程为式(4),单摆振动角速度

为 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$,可将式(4)变换为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} =$$

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

可得

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta$$

将上式两边积分得

$$\int_{\omega}^{\omega} \omega d\omega = \int_{\theta}^{\theta_m} -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta$$

开方后可得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

则周期公式

$$T = 4 \int_0^{\frac{T}{4}} dt = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}} =$$

$$T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_m}} \quad (5)$$

式中积分上限 θ_m 为角振幅,积分下限0即平衡位置.

上式还可写为第一类完全椭圆积分形式

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} K \left(\sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right) \quad (6)$$

4.1 角度的改变与周期的关系

图3为 $0 \sim 90^\circ$ 对应的周期图,图中“*”代表简谐振动式(2)近似下的周期;“o”表示式(5)数值积分计算不同角度对应周期;“+”表示式(6)第一类完全椭圆积分的计算结果.由图可以看到数值计算与第一类完全椭圆积分完全重合,两者重合结果可相互证明方法的正确性.从图中可知摆角大于 10° 后与谐振动明显偏离,此时计算周期不能采用简谐振动的计算方法.

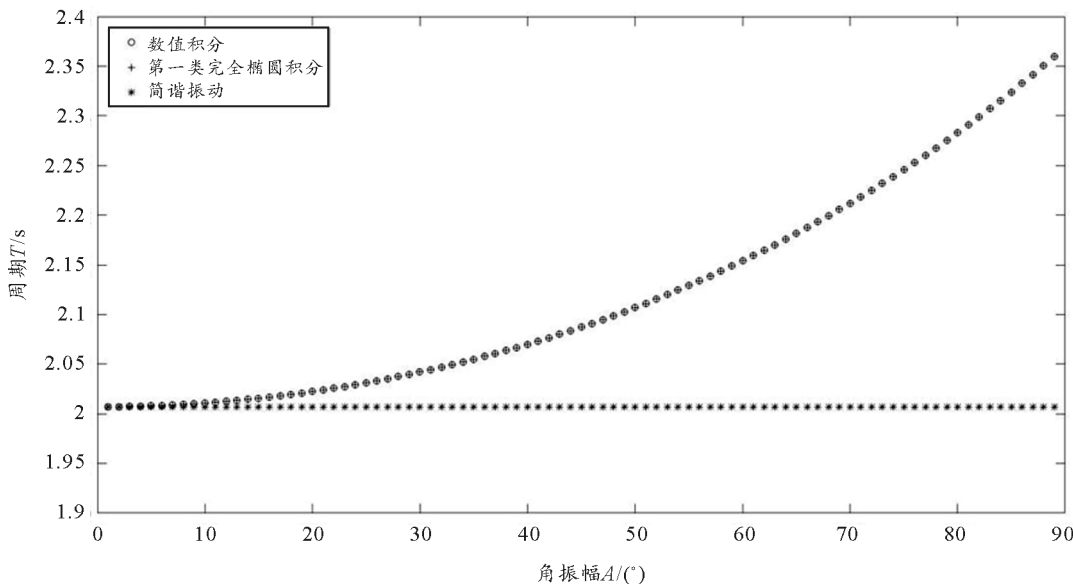


图3 周期与角振幅关系

4.2 摆长对周期的影响

为进一步说明 4.1 中周期与摆角的关系,考虑摆长变化在不同角振幅的情况下周期的变化,表 1 为摆长分别为 20 cm,30 cm,50 cm,70 cm,100 cm

时周期以及对于简谐振动周期的相对误差,其计算公式为 $E_r = \frac{|T - T_0|}{T_0} \times 100\%$,式中 T_0 为谐振动周期.

表 1 不同摆长的周期及相对误差

A \ l/cm	20		30		50		70		100	
	周期 / s	相对误差 / %	周期 / s	相对误差 / %	周期 / s	相对误差 / %	周期 / s	相对误差 / %	周期 / s	相对误差 / %
1	0.897 6	0.00	1.099 3	0.00	1.419 3	0.00	1.679 3	0.00	2.007 1	0.00
3	0.897 8	0.02	1.099 5	0.02	1.419 5	0.02	1.679 5	0.03	2.007 4	0.03
5	0.898 0	0.04	1.099 9	0.05	1.419 9	0.07	1.680 1	0.08	2.008 0	0.10
7	0.898 4	0.08	1.100 4	0.10	1.420 6	0.13	1.680 8	0.16	2.009 0	0.19
9	0.899 0	0.14	1.101 0	0.17	1.421 4	0.22	1.681 8	0.26	2.010 2	0.31
11	0.899 7	0.21	1.101 9	0.25	1.422 5	0.33	1.683 1	0.39	2.011 7	0.46
13	0.900 5	0.29	1.102 9	0.35	1.423 8	0.46	1.684 7	0.54	2.013 6	0.65
15	0.901 5	0.39	1.104 1	0.47	1.425 3	0.61	1.686 5	0.72	2.015 7	0.86
17	0.902 6	0.50	1.105 4	0.61	1.427 1	0.78	1.688 5	0.93	2.018 2	1.11
19	0.903 8	0.62	1.106 9	0.76	1.429 0	0.98	1.690 9	1.16	2.021 0	1.39
21	0.905 2	0.76	1.108 6	0.93	1.431 2	1.20	1.693 5	1.42	2.024 1	1.70
23	0.906 7	0.91	1.110 5	1.12	1.433 7	1.44	1.696 3	1.71	2.027 5	2.04
25	0.908 4	1.08	1.112 6	1.32	1.436 3	1.71	1.699 5	2.02	2.031 2	2.41
27	0.910 2	1.26	1.114 8	1.55	1.439 2	2.00	1.702 9	2.36	2.035 3	2.82
29	0.912 2	1.46	1.117 2	1.79	1.442 3	2.31	1.706 5	2.73	2.039 7	3.26

根据表1的统计结果:相同摆角时摆长增加相对误差也随之增加,摆长较小时相对误差也较小,相对误差在1%内的数据在实际测量时当然可视为较好的测量,由表1可知,如果把1%作为标准的话,摆长为20 cm时摆角 25° 以内都可视为好的测量数据,其误差在完全可接受的范围内,随着摆长增加到100 cm时,摆角 15° 以内的数据都可以算合格数据.当然以上分析的前提为不考虑仪器本身误差和测量时的不可控的人为引入误差等.

单摆实验的实验者在实际实验操作时会特别强调小角摆动对实验结果的重要性,但 5° 以内的角度在实际操作中很难严格控制,从上述分析结果看,可得到结论,只要控制一定的摆角,测量出的周期对实验结果(重力加速度)影响不大.由表1还可得到另一结论:在摆长远大于摆锤尺寸的前提下(理想单摆),摆长不宜过长,否则大角摆动的非线性会影响实验结果.

5 结论

采用理论(数值)分析的方法对单摆进行研究,结果发现单摆由小角到大角的摆动过程中振动图像在由线性(小角)到非线性(大角)缓慢变化,角度越大非线性现象越明显;对周期的计算分别采用第一

类完全椭圆积分和数值积分的方法,结果证明周期与摆长、角振幅相关;不同摆长的周期分析,摆长较小时有利于实际实验测量,其带来的相对误差较摆长较大时更小,为实际操作方便和准确测量,角振幅(摆角)的选取可适当增加,对实验结果不会引入较大误差.

参考文献

- 1 漆安慎,杜婵英.力学[M].北京:高等教育出版社,2000
- 2 赵凯华.从单摆到混沌[J].现代物理知识,1993,5(4):12~14
- 3 李元杰.单摆的规则、随机及混沌运动的研究[J].大学物理,1998,17(9):6~8
- 4 胡敏.计算机仿真物理实验研究[J].信息工程大学学报,2000,3(1):76~78
- 5 谭志中.大摆角单摆运动周期的三个公式[J].广西物理,2003,24(3):28~30
- 6 周凯红,王元勋,李春植.微分求积法在单摆非线性振动分析中的应用[J].力学与实践,2003,25(3):50~52
- 7 明善文,谢泽坤.单摆教学新探[J].物理通报,2020(3):34~36
- 8 林志萍,张欣.就单摆问题引入大学物理教学新模式[J].物理通报,2020(1):21~24
- 9 杨述武,孙迎春,沈国土,等.普通物理实验1(第5版)[M].北京:高等教育出版社,2015
- 10 张霆.大学物理实验[M].北京:高等教育出版社,2019

Numerical Theoretical Analysis on Single Pendulum Experiment

Li Qun Yao Li Zhang Shixuan

(School of Science, East China University of Technology, Nanchang, Jiangxi 330013)

Abstract: With the help of numerical analysis we study the simple pendulum's motion, it is found that the oscillation image changes slowly from linear to nonlinear during the swing of the pendulum from small angle amplitude to large angle amplitude, and the larger the angle, the more obvious the nonlinear phenomenon is. Based on the method of the first complete elliptic integral and numerical integral. The next work about the period from different length of pendulum proved to be related to the pendulum length and angular amplitude, it shows that the small pendulum length is beneficial to the actual measurement, and the relative error is smaller when the pendulum length is smaller.

Key words: pendulum; nonlinear; numerical analysis