

无限长载流薄板磁场的矢势与磁感应强度计算及可视化*

周群益

(广州理工学院 广东 广州 510540)

莫云飞

(长沙学院电子信息与电气工程学院 湖南 长沙 410022)

周丽丽

(赣南医学院信息工程学院 江西 赣州 341000)

侯兆阳

(长安大学理学院应用物理系 陕西 西安 710064)

(收稿日期:2020-06-30)

摘要:推导了无限长均匀薄板电流磁场的矢势和磁感应强度的解析式,将公式无量纲化,计算矢势和磁感应强度,画出中垂面上和板平面上矢势和磁感应强度曲线,并与直线电流磁场的矢势和磁感应强度进行比较,画出矢势和磁感应强度两个分量以及合磁场和方向曲面,画出了二维磁感应线,显示了磁感应强度分布规律。

关键词:薄板电流 矢势 磁感应强度 可视化

1 引言

求无限长均匀通电薄板的磁场是电磁场理论中的一个典型习题,一般教材只计算中垂面或(和)板平面上的磁感应强度^[1],有的习题解答计算了全部空间的磁感应强度^[2,3],其根据是无限长直线电流的磁感应强度公式和场强叠加原理.但这些教材和习题解答没有图像,也没有对结果进行分析.本文根据无限长直线电流磁场的矢势公式和矢势叠加原理求薄板电流磁场的矢势,再利用磁感应强度与矢势的关系简单地求出磁感应强度,并将公式无量纲化,计算和绘制了矢势和磁感应强度的分布曲面以及二维磁感应线,充分显示了磁场的分布规律.

2 薄板电流磁场的矢势

无限长直导线通有电流 I ,其磁场矢势的方向与电流方向相同,大小为^[4]

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} \quad (1)$$

其中, R 是场点到直线电流的距离, R_0 是矢势零点到直线电流的距离.

设薄板的宽度为 $2L$,电流为 I ,则面电流的线密度

$$j = \frac{I}{2L}$$

如图1所示,在直角坐标系 $Oxyz$ 中电流方向沿着 z 方向(垂直纸面向外),矢势 \mathbf{A} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的分布与坐标 z 无关.

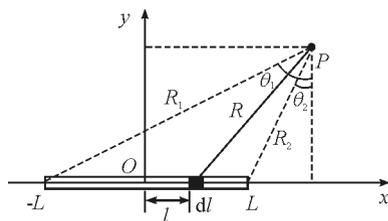


图1 无限长通电薄板的截面和磁场的矢势

取 Oxy 截面,在距离为 l 处取长度 dl ,那么,电流元为

$$dI = jdl$$

场点 $P(x, y)$ 到电流元 dI 的距离为

$$R = \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \quad (2)$$

* 国家自然科学基金,项目编号:11747123;湖南省自然科学基金,项目编号:2018JJ3560;长沙市科技计划项目,项目编号:kc1809022;湖南省教育厅科学研究项目,项目编号:19C0176

作者简介:周群益(1955-),男,副教授,主要从事凝聚态物理研究.

通讯作者:莫云飞(1985-),男,博士,讲师,主要从事大学物理教学研究.

电流元在点 P 产生磁场的矢势大小为

$$dA_z = -\frac{\mu_0 dI}{2\pi} \ln \frac{R}{R_0} = -\frac{\mu_0 j dl}{4\pi} \ln \frac{(x-L)^2 + y^2}{R_0^2}$$

薄板电流在点 P 产生磁场的矢势大小为

$$A_z(x, y) = -\frac{\mu_0 j}{4\pi} \int_{-L}^L \ln \frac{(x-L)^2 + y^2}{R_0^2} dl \quad (3)$$

利用分部积分法可得

$$A_z(x, y) = \frac{\mu_0 j}{4\pi} [(x-L) \ln R_2^2 - (x+L) \ln R_1^2 + 2y(\arctan k_2 - \arctan k_1) + 4L + 4L \ln R_0] \quad (4)$$

其中

$$R_1 = \sqrt{(x+L)^2 + y^2} \quad (5)$$

$$R_2 = \sqrt{(x-L)^2 + y^2}$$

$$k_1 = \frac{x+L}{y} \quad k_2 = \frac{x-L}{y} \quad (6)$$

这里, R_2 和 R_1 分别是场点 P 到薄板右端和左端的距离, k_2 和 k_1 分别是角度 θ_2 和 θ_1 的正切. 取 $(0, 0)$ 为矢势零点, 可得

$$\ln R_0 = \ln L - 1 \quad (7)$$

因此

$$A_z(x, y) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left[(x-L) \ln \frac{R_2}{L} - (x+L) \ln \frac{R_1}{L} + y(\arctan k_2 - \arctan k_1) \right] \quad (8)$$

当 $x=0$ 时, 可得中垂面上的矢势大小

$$A_z(0, y) = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \cdot \left(y \arctan \frac{L}{y} + L \ln \frac{\sqrt{L^2 + y^2}}{L} \right) \quad (9)$$

当 $y \rightarrow 0$ 时, 可得板平面上的矢势大小

$$A_z(x, 0) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left[(x-L) \ln \left| \frac{x-L}{L} \right| - (x+L) \ln \left| \frac{x+L}{L} \right| \right] \quad (10)$$

当 $x=0$ 时, 可得原点处的矢势 $A(0, 0) = 0$.

3 薄板电流的磁感应强度

根据矢势的旋度可求磁感应强度

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11)$$

在直角坐标系中可得

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

分量为

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad B_z = 0 \quad (12)$$

将式(4)代入上式, 可得磁感应强度的两个分量

$$B_x(x, y) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} (\arctan k_2 - \arctan k_1) \quad (13)$$

$$B_y(x, y) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (14)$$

合磁感应强度大小为

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (15)$$

方向由角度确定

$$\alpha = \arctan \frac{B_y}{B_x} \quad (16)$$

讨论:(1) 当 $x=0$ 时, 由式(13)、(14) 可得中垂面上磁感应强度的两个分量

$$B_x(0, y) = -\frac{\mu_0 j}{\pi} \arctan \frac{L}{y} \quad (17)$$

$$B_y(0, y) = 0$$

当 $y \rightarrow \pm 0$ 时, 可得原点处的磁感应强度

$$B_x(0, 0) = \mp \frac{\mu_0 j}{2} \quad (18)$$

(2) 当 $y \rightarrow 0$ 时, 由式(13)、(14) 可得板平面上磁感应强度的两个分量

$$B_x(x, 0) \rightarrow 0 \quad (|x| > L) \quad (19)$$

$$B_x(x, 0) = \mp \frac{\mu_0 j}{2} \quad (|x| < L)$$

$$B_y(x, 0) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \ln \left| \frac{x+L}{x-L} \right| \quad (20)$$

(3) 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 由式(13) 可得

$$B_x(x, y) \rightarrow \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\mu_0 j}{2} \quad (y > 0) \quad (21)$$

$$B_x(x, y) \rightarrow \frac{\mu_0 j}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 j}{2} \quad (y < 0)$$

由式(14) 可得

$$B_y(x, y) = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \ln \frac{\left(\frac{x}{L} + 1 \right)^2 + \left(\frac{y}{L} \right)^2}{\left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y}{L} \right)^2} \rightarrow 0 \quad (22)$$

说明无限大薄板电流在两边产生的是匀强磁场.

(4) 当 $|x| \gg L$ 且 $|y| \gg L$ 时, 由式(13) 可得

$$B_x(x, y) = \frac{\mu_0 j}{2\pi} \arctan \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \approx -\frac{\mu_0 j L y}{\pi(x^2 + y^2)} = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad (23)$$

由式(5) 可得

$$R_1 \approx \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{Lx}{x^2 + y^2} \right)$$

$$R_2 \approx \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{Lx}{x^2 + y^2} \right)$$

将 R_1 和 R_2 代入式(14), 可得

$$B_y(x, y) \approx \frac{\mu_0 j L x}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad (24)$$

将 B_x 和 B_y 代入式(15), 可得

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (25)$$

这是无限长直线电流产生的磁感应强度公式。

4 磁场公式的无量纲化

取 L 作为坐标单位, 则

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

二者均为无量纲的坐标. 取

$$A_0 = \frac{\mu_0 j L}{2}$$

为矢势的单位, 将式(7)代入式(1), 可得直线电流磁场的无量纲的矢势

$$A_z^* = \frac{A_z}{A_0} = -\frac{1}{\pi} (\ln R^{*2} + 2) \quad (26)$$

其中

$$R^* = \frac{R}{L}$$

薄板电流磁场的无量纲的矢势为

$$A_z^*(x^*, y^*) = \frac{A_z(x, y)}{A_0} = \frac{1}{\pi} y^* (k_2 \ln R_2^* - k_1 \ln R_1^* + \arctan k_2 - \arctan k_1) \quad (27)$$

其中

$$R_1^* = \frac{R_1}{L} = \sqrt{(x^* + 1)^2 + y^{*2}} \quad (28)$$

$$R_2^* = \frac{R_2}{L} = \sqrt{(x^* - 1)^2 + y^{*2}}$$

$$k_1 = \frac{x^* + 1}{y^*} \quad k_2 = \frac{x^* - 1}{y^*} \quad (29)$$

同理可得中垂面和板平面上无量纲的矢势.

$$\text{设} \quad B_0 = \frac{\mu_0 j}{2}$$

显然

$$B_0 = \frac{A_0}{L}$$

取 B_0 作为磁感应强度的单位, 则无量纲的磁感应强度分量分别为

$$B_x^*(x^*, y^*) = \frac{B_x(x, y)}{B_0} = \frac{1}{\pi} (\arctan k_2 - \arctan k_1) \quad (30)$$

$$B_y^*(x^*, y^*) = \frac{B_y(x, y)}{B_0} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{R_1^*}{R_2^*} \quad (31)$$

无量纲的合磁场大小和方向分别为

$$B^* = \sqrt{B_x^{*2} + B_y^{*2}} \quad \alpha = \arctan \frac{B_y^*}{B_x^*} \quad (32)$$

同理可得中垂面和板平面上无量纲的矢势和磁感应强度的分量.

5 磁场的可视化

(1) 无限长薄板电流在中垂面上磁场的矢势 $A_z(0, y)$ 的曲线如图 2(a) 所示, $A_z(0, y)$ 是 y 的偶函数, 离板越近, 矢势越高, $y = 0$ 处是一个尖点; 当 $|y|$ 很大时, 其矢势接近于直线电流磁场的矢势. 中垂面上的磁场 $B_x(0, y)$ 的曲线如图 2(b) 所示, 中垂面上的磁场分量 $B_y(0, y) = 0$, 而分量 $B_x(0, y)$ 是 y 的奇函数, 说明薄板两边磁场的方向相反, 离板越近, 磁场越大. 磁场在 $y = 0$ 处发生跳跃, 这是因为 $A_z(0, y)$ 在此处是尖点. 当 $|y|$ 很大时, 其磁场接近于直线电流产生的磁场.

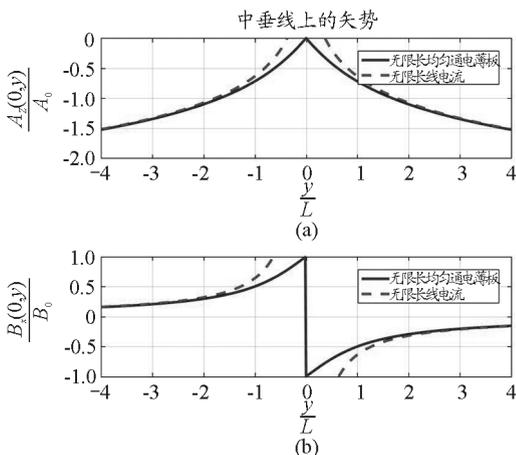


图2 无限长均匀通电薄板中垂面上的矢势和磁场

(2) 薄板电流在板平面磁场的矢势 $A_z(x, 0)$ 的曲线如图 3(a) 所示, $A_z(x, 0)$ 是 x 的偶函数, 轴心的矢势最高; 在板的边缘 $x = \pm L$ 处的矢势是拐点, 当 $|x|$ 很大时, 其矢势接近于直线电流磁场的矢势. 板平面上的磁场 $B_y(x, 0)$ 的曲线如图 3(b) 所示, $B_y(x, 0)$ 是 x 的奇函数, 板内磁场是单调上升的曲线, 板外磁场是单调下降的曲线, 板的边缘 $x = \pm L$

处的磁场在理论上是无穷大;当 $|x|$ 很大时,其磁场接近于直线电流产生的磁场。

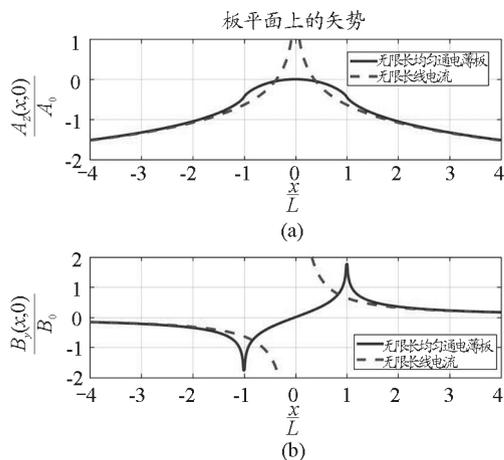


图3 无限长均匀通电薄板平面上的矢势和磁场

(3) 薄板电流磁场的矢势 $A_z(x, y)$ 分布面如图4所示,点 $(0, 0)$ 的矢势最高;中垂面上的矢势 $A_z(0, y)$ 的曲线和板平面上的矢势 $A_z(x, 0)$ 的曲线分布在曲面上。

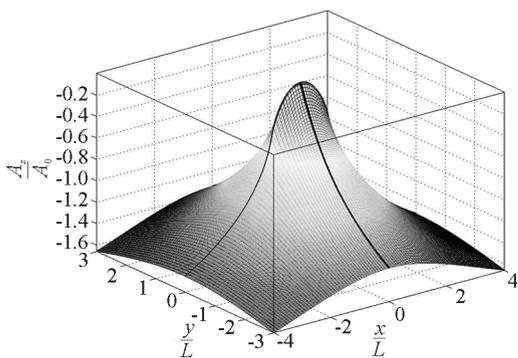


图4 无限长均匀通电薄板磁场的矢势分布面

(4) 薄板电流磁场的 x 分量 $B_x(x, y)$ 的曲面如图5所示, B_x 有一个“峭壁”,位于薄板所在处,在板的表面 $(x, 0^+)$, 磁场为 $-B_0$; 在板的表面 $(x, 0^-)$, 磁场为 B_0 。

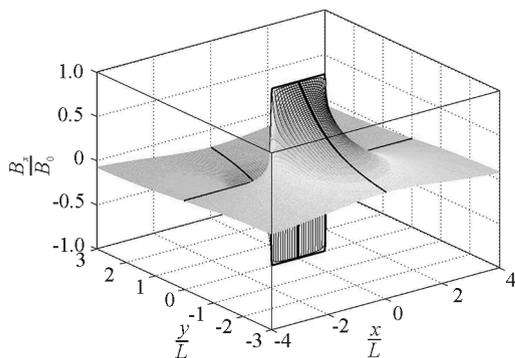


图5 无限长均匀通电薄板磁场的 x 分量分布面

(5) 薄板电流磁场的 y 分量 $B_y(x, y)$ 的曲面如图6所示, B_y 有一对对称的“峰”和“谷”,这是薄板边缘的 B_y , $(\pm L, 0)$ 处的 B_y 在理论上是无穷大。

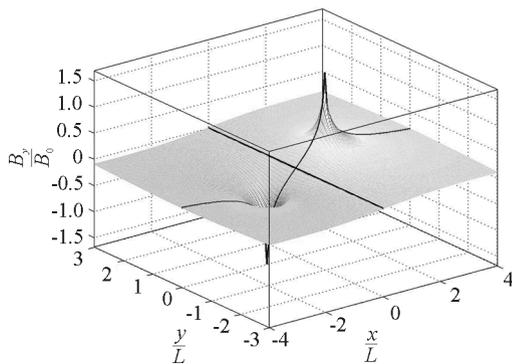


图6 无限长均匀通电薄板磁场的 y 分量分布面

(6) 合磁场 $B(x, y)$ 的曲面如图7所示,点 $(0, 0)$ 是 B 的一个鞍点. B 有一对犄角,说明薄板边缘的磁场在理论上是无穷大。

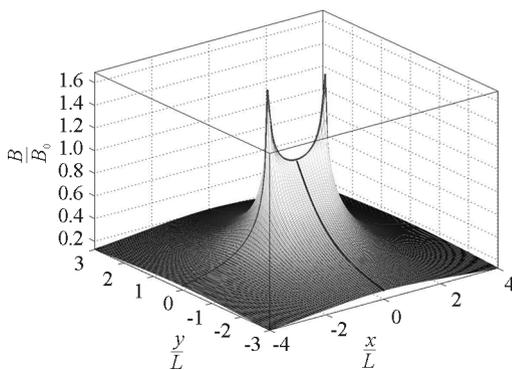


图7 无限长均匀通电薄板合磁场的分布面

(7) 合磁场 B 的方向角 $\alpha(x, y)$ 曲面如图8所示, α 随着极角的增加而增加. 在 $x=0, y > 0$ 的正轴上, α 发生从 π 到 $-\pi$ 的跃变; 在 $y=0, -L < x < L$ 的板面两侧, α 也发生了跃变。

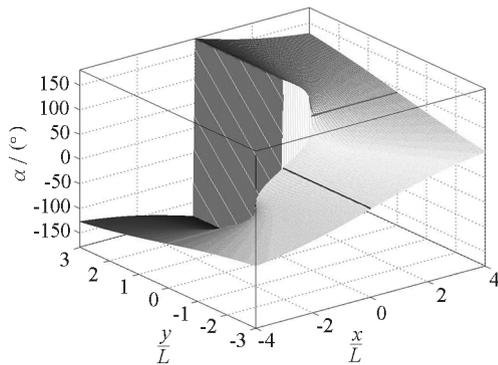


图8 无限长均匀通电薄板磁场方向的分布面

(8) 薄板电流磁场在截面上的磁感应线如图9所示,在薄板附近,磁感应线比较密集,磁场比较强;离板越远,磁感应线越稀疏,磁场越弱;远处的磁感应线接近于圆。

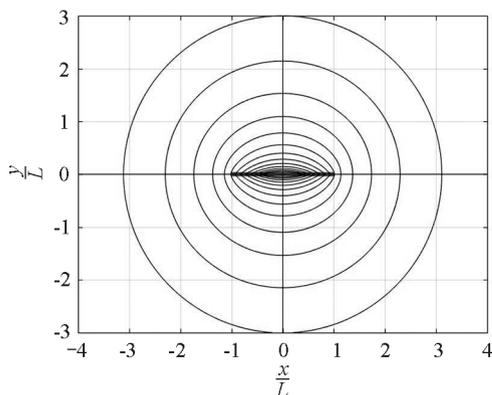


图9 无限长均匀通电薄板的磁感应线

6 结束语

本文建立了均匀通电薄板在直角坐标系中的矢势和磁感应强度公式,通过无量纲化处理,解决了有关的计算和可视化的问题.如果将这种方法解决均匀带电薄板的电势和电场强度的问题,将发现两个问题的解答和图片有许多相似之处。

参考文献

- 1 吴百诗. 大学物理新版(上册)[M]. 北京:科学出版社, 2006. 371 ~ 373
- 2 王发伯,赵仲黑,黄宁庆,等. 普通物理典型题解[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1981. 309 ~ 310
- 3 张之翔. 电磁学千题解(第3版)[M]. 北京:科学出版社, 2018. 390 ~ 391
- 4 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:人民教育出版社,1979. 90

Calculation and Visualization of Vector Potential and Magnetic Induction Intensity of Magnetic Field of Infinitely Long Current – carrying Thin – plate

Zhou Qunyi

(Guangzhou Institute of Science and Technology, Guangzhou, Guangdong 510540)

Mo Yunfei

(School of Electronic Information and Electrical Engineering, Changsha University, Changsha, Hunan 410022)

Zhou Lili

(Department of Information Engineering, Gannan Medical University, Ganzhou, Jiangxi 341000)

Hou Zhaoyang

(School of Science, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064)

Abstract: The analytical solutions of the vector potential and magnetic induction intensity of the infinitely long current – carrying thin – plate are derived, the equations are transform into the dimensionless form, the vector potential and magnetic induction intensity are also calculated; the vector potential and magnetic induction intensity curves on the midperpendicular plane and on the plane of the plate are drawn, and compared it with that of the straight line current; and the two components of the vector potential and magnetic induction intensity as well as the combined magnetic field and the directional surface are also depicted, the two dimensional magnetic induction line are drawn, which reveals the distribution rule of magnetic induction intensity.

Key words: current – carrying thin – plate; vector potential; magnetic induction intensity; visualization