

近年高考对图像问题的考查角度及解题方法例析

胡东明 宋海霞

(武汉市新洲区第一中学阳逻校区 湖北 武汉 430415)

(收稿日期:2020-07-29)

摘要: 高考仍然注重对图像斜率和面积的物理意义的考查,但是考查角度有创新. 试题给出的图像斜率和面积往往没有物理意义,可以采用微分学的复合函数求导法则,将图像的斜率表达式转换成有一定物理意义的复合函数表达式,也可以改变坐标轴的物理量,将原图像转换成面积有一定的物理意义的图像.

关键词: 图像 斜率 面积 考查角度

《国务院关于深化考试招生制度的实施意见》(以下简称《意见》)明确提出深化高考考试内容的改革,依据高校人才选拔要求和国家课程标准,科学设计命题内容,增强基础性、综合性,着重考查学生独立思考和运用所学知识分析问题、解决问题的能力. 近年来,高考加大了对图像问题的考查力度,在图像的呈现方式、知识的整合等方面有较大突破,充分体现了《意见》中增强基础性、综合性的要求. 对于图像新的呈现方式,不仅需要学生能识图、用图,还需要学生能独立思考,灵活运用所学知识分析问题、解决问题.

【例 1】(2020 年高考全国卷 I 第 17 题) 图 1(a) 所示的电路中, K 与 L 间接一智能电源,用以控制电容器 C 两端的电压 U_C . 如果 U_C 随时间 t 的变化如图 1(b) 所示,则下列描述电阻 R 两端电压 U_R 随时间 t 变化的图像中,正确的是()

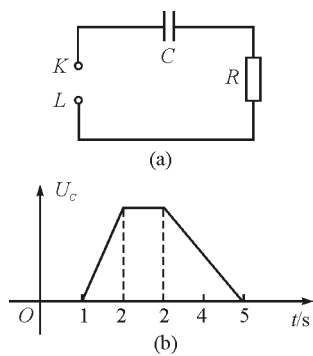
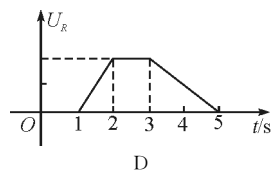
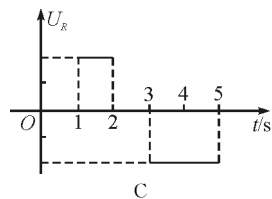
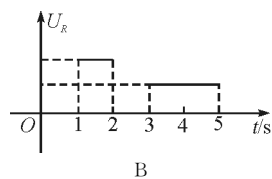
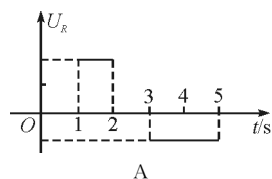


图 1 例 1 题图



考查角度: 学生常见的是恒定电压源给电容器充放电的 $I-t$ 图像,图像与横轴围成的面积表示电容器充放电过程中释放或充入的电荷量. 本题呈现的是电容器的电压 U_C 随时间 t 的变化图,图像的面积或斜率均没有物理意义,只有分析出电路中的电流 I 随时间 t 的变化图,才可以得到电阻 R 两端电压 U_R 随时间 t 变化的图,常规思维无法求解.

解题方法:图像的斜率 $k = \frac{\Delta U_C}{\Delta t}$ 没有物理意义,

采用微分学的复合函数求导法则,斜率

$$k = \frac{\Delta U_C}{\Delta t} = \frac{\Delta U_C}{\Delta q} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

由电容和电流的定义知,式中

$$\frac{\Delta U_C}{\Delta q} = \frac{1}{C} \quad \frac{\Delta q}{\Delta t} = I$$

所以斜率 $k = \frac{1}{C}I$, 又 $U_R = IR = kCR$, 即电阻 R 两端电压 U_R 与 U_C-t 图的斜率 k 成正比. $0 \sim 1$ s 内和 $2 \sim 3$ s 内 U_C-t 图的斜率 $k=0$, 电路中没有电流, 电阻两端电压 $U_C=0$; $1 \sim 2$ s 内电容器充电, $3 \sim 5$ s 内电容器放电, $1 \sim 2$ s 内 U_C-t 图像斜率的大小是 $3 \sim 5$ s 内 U_C-t 图像斜率的大小的 2 倍, 斜率的正负符号相反, 故 $1 \sim 2$ s 内电流是 $3 \sim 5$ s 内电流的 2 倍, 电流方向相反. 所以选项 A 正确.

说明:上述分析方法是从图像的斜率出发, 采用微分学的复合函数求导法则, 变换斜率的表达式. 这种方法, 可以将图像的斜率无物理意义转换成有相应物理意义的复合函数表达式, 对解决图像斜率的物理意义非常有效. 本题也可以从电流入手, 由电容器 $\Delta q = C\Delta U$, 有 $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{\Delta U}{\Delta t}$, 得到电流 I 与 U_C-t 图的斜率成正比.

拓展分析:由 $k = \frac{\Delta U_C}{\Delta t} = \frac{\Delta U_C}{\Delta q} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{C}I$ 知, 本题 U_C-t 图的斜率实质是反映电路中电流 I 随时间 t 变化图, 其 $I-t$ 图如图 2 所示. 但是, 如果试题的图像以 $I-t$ 图的形式呈现, 本题就变得非常平淡无奇了, 对学生科学思维能力的考查也就大打折扣.

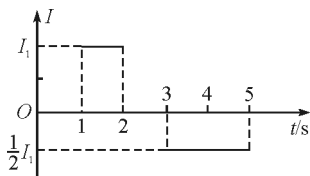
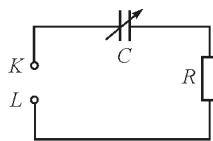


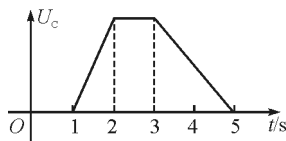
图 2 $I-t$ 图像

本题可改编如下:

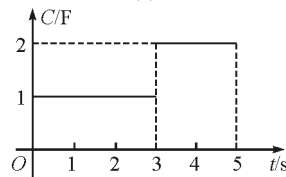
【例 2】如图 2(a) 所示的电路中, K 与 L 间接一智能电源, 用以控制电容器 C 两端的电压 U_C . 如果 U_C 随时间 t 的变化如图 3(b) 所示, 可变电容器的电容 C 随时间变化如图 3(c) 所示, 则下列描述电阻 R 两端电压 U_R 随时间 t 变化的图像中, 正确的是()



(a)

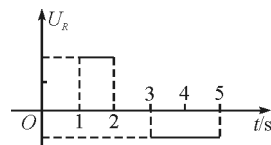


(b)

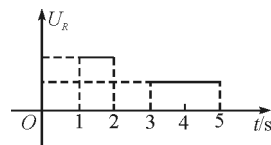


(c)

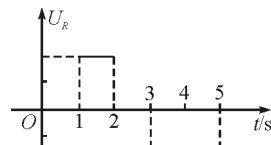
图 3 例 2 题图



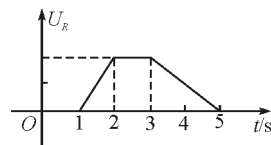
A



B



C



D

解析:由前面的分析知 $U_R = IR = kCR$. $0 \sim 1$ s 和 $2 \sim 3$ s 内 $k=0$, $C=1$ F, 故 $U_R=0$; $1 \sim 2$ s 内 $C=1$ F, $3 \sim 5$ s 内 $C=2$ F, 但是, $1 \sim 2$ s 内 U_C-t 图像斜率的大小是 $3 \sim 5$ s 内 U_C-t 图像斜率的大小的 2 倍, 斜率的正负符号相反, 故 $1 \sim 2$ s 内电阻两端的电压与 $3 \sim 5$ s 内电阻两端的电压大小相等, 方向相反. 所以选项 C 正确.

【例 3】(2019 年高考全国卷 I 第 21 题)(多选) 在星球 M 上将一轻弹簧竖直固定在水平桌面上, 把物体 P 轻放在弹簧上端, P 由静止向下运动, 物体的

加速度 a 与弹簧的压缩量 x 间的关系如图 4 中实线所示. 在另一星球 N 上用完全相同的弹簧, 改用物体 Q 完成同样的过程, 其 $a-x$ 关系如图中虚线所示. 假设两星球均为质量均匀分布的球体. 已知星球 M 的半径是星球 N 的 3 倍, 则()

- A. M 与 N 的密度相等
 B. Q 的质量是 P 的 3 倍
 C. Q 下落过程中的最大动能是 P 的 4 倍
 D. Q 下落过程中弹簧的最大压缩量是 P 的 4 倍

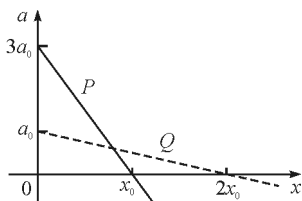


图 4 例 3 题图

考查角度: 本题以 $a-x$ 图像呈现相关物理过程, 图像的斜率和面积均没有物理意义, 让人觉得无从下手. 通过图像与坐标轴的交点分析, 可以知道选项 A, C 正确, 但是选项 C 的分析要用到弹簧的弹性势能公式 $E_p = \frac{1}{2}\kappa x^2$. 分析过程如下.

如图 5 所示, 当 $x=0$ 时, 对 P : $m_P g_M = m_P \cdot 3a_0$, 即星球 M 表面的重力加速度 $g_M = 3a_0$; 对 Q : $m_Q g_N = m_Q a_0$, 即星球 N 表面的重力加速度 $g_N = a_0$.

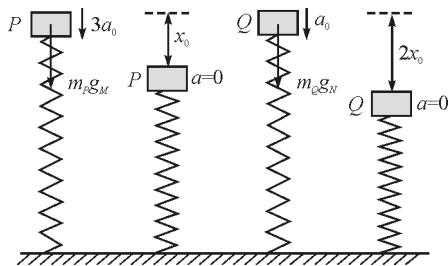


图 5 分析过程图

当 P 和 Q 的加速度 $a=0$ 时, 对 P 有: $m_P g_M = \kappa x_0$, 则 $m_P = \frac{\kappa x_0}{3a_0}$, 对 Q 有: $m_Q g_N = \kappa \cdot 2x_0$, 则 $m_Q =$

$\frac{2\kappa x_0}{a_0}$, 即 $m_Q = 6m_P$, 选项 B 错误; 根据 $mg = G \frac{Mm}{R^2}$

得, 星球质量 $M = \frac{gR^2}{G}$, 则星球的密度 $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$

$\frac{3g}{4\pi GR}$, 所以 M 和 N 的密度之比 $\frac{\rho_M}{\rho_N} = \frac{g_M R_N}{g_N R_M} = \frac{3}{1} \times$

$\frac{1}{3} = 1$, 选项 A 正确; 当 P 和 Q 的加速度为零时, P 和 Q 的动能最大, 系统的机械能守恒, 对 P 有

$$m_P g_M x_0 = \frac{1}{2}\kappa x_0^2 + E_{kP}$$

即 $E_{kP} = 3m_P a_0 x_0 - \frac{1}{2}\kappa x_0^2$

对 Q 有 $m_Q g_N \cdot 2x_0 = \frac{1}{2}\kappa (2x_0)^2 + E_{kQ}$

即 $E_{kQ} = 2m_Q a_0 x_0 - 4 \times \frac{1}{2}\kappa x_0^2 =$

$$12m_P a_0 x_0 - 4 \times \frac{1}{2}\kappa x_0^2 =$$

$$4 \times (3m_P a_0 x_0 - \frac{1}{2}\kappa x_0^2) = 4E_{kP}$$

选项 C 正确; P 和 Q 在弹簧压缩到最短时, 其位置与初位置关于加速度 $a=0$ 时的位置对称, 故 P 下落过程中弹簧的最大压缩量为 $2x_0$, Q 下落过程中弹簧的最大压缩量为 $4x_0$, 选项 D 错误.

解题方法: $a-x$ 图像的斜率和面积均没有物理意义, 但是, 如果将纵轴 a 与质量 m 相乘, 转换成 $ma-x$ 图像, 由于 $F=ma$, 所以 $ma-x$ 图像其实就是合外力 F 随位移 x 的关系图像, 其面积表示合外力做的功, 这样, 选项 C 的问题就得到解决. 转换后的 $ma-x$ 图像面积分别为

$$W_P = \frac{1}{2}m_P \cdot 3a_0 x_0$$

$$W_Q = \frac{1}{2}m_Q a_0 \cdot 2x_0$$

由 $m_Q = 6m_P$, 得 $W_Q = 4W_P$, 根据动能定理知, Q 下落过程中的最大动能是 P 的 4 倍, 选项 C 正确.

说明: 考查图像问题, 往往离不开轴、线、斜率、面积、截距、特殊点等这 6 个方面. 通过相关的数学或物理规律的转换, 在斜率或面积上进行创新, 是近年来高考图像类问题的命题方向, 解决这类问题, 可以运用微分学的复合函数求导法则, 将图像的斜率表达式转换成有一定物理意义的复合函数表达式 (如例 1), 也可以改变坐标轴的物理量, 将原图像转换成面积有一定的物理意义的图像 (如例 2).

新课程高考注重“必备知识、关键能力、学科素养、核心价值”的考查, 以“基础性、综合性、应用性、创新性”为考查要求. 图像类试题能有效地考查学生的科学思维能力水平, 较好地考查学生应用数学处理物理问题的能力, 应该引起我们足够重视.