用矩阵方法处理物块碰撞次数问题

彭定辉

（江西省南丰县第一中学　江西 抚州　344500）

（收稿日期：2020－08－18）

摘　要：对两物块及墙壁之间的弹性碰撞，通过构造系统的状态矢量和作用算符，得到状态转换方程，并结合系统无量纲速度图像，求解出碰撞次数.

关键词：碰撞次数　无量纲化　状态矢量　作用算符　状态转换方程　旋转矩阵

1　问题

碰撞次数问题是近期网上热议的中学物理问题之一.《碰撞出来的圆周率》一文对此进行了详尽细致的讨论分析，证明了碰撞次数与圆周率的关系[1]；再有《关于物块碰撞次数的探讨》用速度相图方法对该问题进行了研究[2]. 本文从系统的观点出发，借助矩阵方法，为碰撞次数问题建立一种清晰的物理模型.

为了简化物理情景，故对原题进行部分改动，陈述如下：

【变题】如图 1 所示，有大小两物块质量分别为 M 和 m，其中 $\dfrac{M}{m}=a^2\gg 1$，放置在光滑水平面上，在两物块左边有一墙壁，现让大物块 M 以一初速度 u_0 从右向左撞向小物块 m，之后小物块 m 在大物块 M 和墙之间来回碰撞直至 M 以原速率向右运动，不计一切能量损失. 求：全过程两物块相互碰撞的总次数.

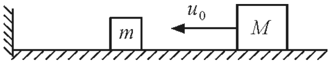

图 1　变题题图

2　分析

将两物块先相互碰撞，再小物块与墙相碰的过程称为一次冲击，系统运动的整个全过程由多次冲击组成. 现就一次冲击中的两次碰撞进行具体分析.

为了凸显运动的对称性，规定小物块 m 向右为正方向，大物块 M 向左为正方向. 它们之间为弹性碰撞，假定两物块碰前速度分别为 v_0 和 u_0，碰后速度分别为 v 和 u，故有

$$-mv+Mu=-mv_0+Mu_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mu^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}Mu_0^2$$

求解得

$$u=\frac{M-m}{M+m}u_0-\frac{2m}{M+m}v_0$$

$$v=\frac{m-M}{m+M}v_0-\frac{2M}{m+M}u_0$$

接着小物块 m 与墙壁发生弹性碰撞，速度反向，故有：$v'=-v$. 可以把 v_0 和 u_0 称为两物块在冲击过程的初速度，v' 和 u 称为对应的末速度.

系统第 $k+1$ 次冲击时，两物块初速度分别为 v_k 和 u_k，末速度分别为 v_{k+1} 和 u_{k+1}，故有

$$u_{k+1}=\frac{M-m}{M+m}u_k-\frac{2m}{M+m}v_k \tag{1}$$

$$v_{k+1}=\frac{2M}{M+m}u_k+\frac{M-m}{M+m}v_k \tag{2}$$

由于两物块系统能量守恒，即有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mu^2=E \tag{3}$$

设 $E=0+\dfrac{1}{2}Mu_0^2=\dfrac{1}{2}mv_N^2+0$，$v_N$ 和 u_0 分别表示两物块的最大速度，且 $v_N=\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_0=au_0$. 对式

作者简介：彭定辉（1975－　），男，中教一级，研究方向为中学物理竞赛和中学物理教学.

(3) 两边同时除以 E,进行无量纲化处理,有

$$\left(\frac{v}{v_N}\right)^2+\left(\frac{u}{u_0}\right)^2=1 \tag{4}$$

即能量守恒式(3) 简化为

$$V^2+U^2=1$$

其中 $V=\left(\frac{v}{v_N}\right)$,$U=\left(\frac{u}{u_0}\right)$ 为两物块的无量纲速度. 故对式(1) 两边同时除以 u_0,式(2) 两边同时除以 v_N,且 $\frac{M}{m}=a^2$,也进行无量纲化处理,得

$$U_{k+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1}U_k-\frac{2a}{a^2+1}V_k \tag{5}$$

$$V_{k+1}=\frac{2a}{a^2+1}U_k+\frac{a^2-1}{a^2+1}V_k \tag{6}$$

根据式(5)、(6) 方程系数的形式特征,令 $\frac{1}{a}=\tan\frac{\theta}{2}$,将式(5)、(6) 继续简化,得

$$U_{k+1}=\cos\theta U_k-\sin\theta V_k \tag{7}$$

$$V_{k+1}=\sin\theta U_k+\cos\theta V_k \tag{8}$$

此时可以用矩阵来表示此方程组

$$\begin{bmatrix}U_{k+1}\\V_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_k\\V_k\end{bmatrix}$$

若将 $\begin{bmatrix}U_k\\V_k\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}U_{k+1}\\V_{k+1}\end{bmatrix}$ 理解为系统在一次冲击中的初末状态矢量,$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 理解为系统在一次冲击中受到的作用算符,则可模仿量子力学方法,采用狄拉克右矢符号标记状态矢量[3],则有

$$|\,k+1\rangle=P\,|\,k\rangle \tag{9}$$

其中 $|\,k+1\rangle=\begin{bmatrix}U_{k+1}\\V_{k+1}\end{bmatrix}$,$|\,k\rangle=\begin{bmatrix}U_k\\V_k\end{bmatrix}$,$P=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$,且发现矩阵 P 只与 θ 角有关,与系统的具体状态无关,是一个恒定作用算符. 式(9) 可称为系统的状态转换方程,即原来处于 $|\,k\rangle$ 状态的系统然后经过一次冲击作用后,变换到 $|\,k+1\rangle$ 状态.

由能量守恒式 $V^2+U^2=1$ 可知,系统的状态矢量 $\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}$ 是一个单位矢量;在以 U 为横轴,V 为纵轴的 U-V 系统状态图中,其图像为单位圆. 两状态矢量 $|\,k\rangle=\begin{bmatrix}U_k\\V_k\end{bmatrix}$ 和 $|\,k+1\rangle=\begin{bmatrix}U_{k+1}\\V_{k+1}\end{bmatrix}$ 在 $U-V$ 系统状态图中是单位圆中不同方向的半径,如图 2 所示.

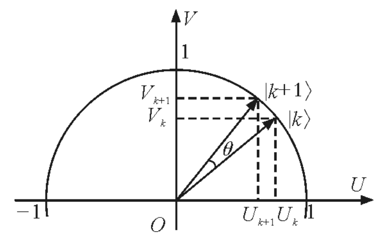

图 2　$U-V$ 系统状态图

设 $|\,k\rangle$ 状态矢量的相位角为 α,即 $U_k=\cos\alpha$,$V_k=\sin\alpha$,代入式(7)、(8),得

$$U_{k+1}=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha=\cos(\theta+\alpha)$$

$$V_{k+1}=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha=\sin(\theta+\alpha)$$

即

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\theta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix} \tag{10}$$

由上式可知,矩阵 P 作为作用算符,并不改变状态矢量的大小,仅仅改变状态矢量的相位角,使状态矢量沿逆时针方向旋转 θ 角. 故矩阵算符 P 也称为旋转矩阵[4].

考虑方程 $|\,k+1\rangle=P\,|\,k\rangle$ 的迭代性,使两物块系统连续经过 N 次冲击,有 $|\,k+n\rangle=P^n\,|\,k\rangle$,可证明 $P^n=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$,即 P^n 使状态矢量逆时针旋转 $n\theta$ 角.

3　问题解决

由题意可知,大物块初速度为 u_0 且小物块开始时静止,即系统的初始状态为:$|\,0\rangle=\begin{bmatrix}U_0\\V_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{bmatrix}$,其状态矢量的相位角为零;而最终大物块以原速率返回,即 $u_N=-u_0$,则无量纲速度为 $U_N=\left(\frac{u_N}{u_0}\right)=-1$,又由于 $V_N^2+U_N^2=1$,可知 $V_N=0$,故系统的最终状态为

$$|\,N\rangle=\begin{bmatrix}U_N\\V_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\pi\\ \sin\pi\end{bmatrix}$$

(下转第 67 页)

既然之前轻杆对小球做正功了，为什么在最高点时就默认轻杆对小球的力就沿着杆了呢？这里我们也需要利用角动量定理来解释，当 m 球转到最高点时 $2m$ 球在最低点，以圆心为轴这个整体受到外力都经过圆心，所以力矩 M 为零，则角加速度 $\beta=0$，切向加速度 $a_t=0$，则轻杆给小球的力一定沿着杆方向.

由此，我们通过竞赛中常用的角动量定理解释了我们在轻杆模型中这几点疑惑. 在教学中我们经常会碰到一些考试中不太会考到的问题，考试中几乎不出现导致我们也并不重视，但是这些问题的确是存在的，学生会问，我们自己也会很疑惑. 这时候就需要学习一些新的知识来帮我们彻底解决. 这样我们脑海中的知识体系才能完整.

Thinking about the Direction of Force on Light Rod

Yu Hui

(Urumqi Bayi Middle School, Urumqi, Xinjiang　830002)

Abstract: Aiming at the difficult problem of the direction of the force on the light pole in physics of senior high school, this paper uses a classic question in National College Entrance Examination to remove the doubts about the light rod model in circular motion through the angular momentum theorem commonly used in competitions, and explains the common models in the topic further.

Key words: light rod model; angular momentum theorem; moment of inertia

（上接第 64 页）

其状态矢量的相位角为 π.

假设全过程中经过 N 次冲击，即两物块互碰 N 次，则有方程

$$|N\rangle = P^N|0\rangle \tag{11}$$

或

$$\begin{bmatrix}\cos\pi\\ \sin\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos N\theta & -\sin N\theta\\ \sin N\theta & \cos N\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 0\\ \sin 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

即 P^N 使状态矢量逆时针旋转 $N\theta$ 角，刚好使系统的状态矢量的相位角从零增加到 π，故有

$$N\theta=\pi \tag{13}$$

$$N=\frac{\pi}{\theta}=\frac{\pi}{2\arctan\dfrac{1}{a}}=\frac{\pi}{2\arctan\sqrt{\dfrac{m}{M}}} \tag{14}$$

又由于

$$\frac{M}{m}=a^2\gg 1$$

且碰撞次数为整数，故两物块相互碰撞的总次数为

$$N=\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\right] \tag{15}$$

式(15) 中“[]”为取整符号.

4　结束语

本文借助量子力学的概念，用状态矢量和矩阵算符描述系统的状态变化，使得物理方程形式简洁，意义明确；状态转换式

$$|k+1\rangle=P|k\rangle$$

从某种角度来说具有物理通用性，对于同类问题有一定的参考价值.

参考文献

1　陈怡. 碰撞出来的圆周率 —— 两球与墙壁三者间的碰撞次数与圆周率 π 间关系的讨论[J]. 物理与工程，2020，30(1)：68 ～ 72

2　程军，孙辉. 关于物块碰撞次数的探讨[J]. 大学物理，2020，39(8)：11 ～ 13

3　科恩·塔诺季，迪于，拉洛埃. 量子力学(第1卷)[M]. 北京：高等教育出版社，2014. 7

4　史蒂文 J·利昂. 线性代数(第 9 版)[M]. 北京：机械工业出版社，2015. 9