浅水波波速公式的推导

张利国
（北京交通大学附属中学　北京　100081）
周庆莉
（首都师范大学物理系　北京　100037）

（收稿日期：2020－09－15）

摘　要：在不同的介质中，波速的不同导致波的传播方向发生偏折．新教材中重新引入了“波的折射”的相关内容，并通过调整水的深浅来观察“波的折射”现象．因而就有必要建立波速 v 和水深 h 之间的关系，许多教师对如何推导二者之间的关系不甚了解，本文试图解决这一困惑．

关键词：浅水波　波的折射　波速公式

1　“波的折射”在新教材出现

区别于旧版高中教材，在 2020 年人教版新教材选择性必修第一册第三章第 3 节“波的反射、折射和衍射”一课中，增加了“波的折射”的相关内容，并利用发波水槽演示了波的折射现象．

在演示波的折射现象的实验中，一般是调整水深，使一列水波在深度不同的两个区域传播，让学生们观察交界面处的折射现象，如图 1 所示．

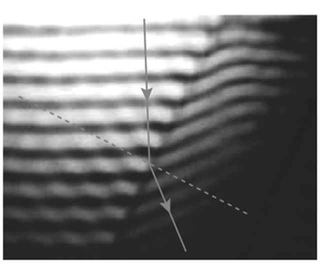

图 1　演示交界面处的折射现象

根据惠更斯原理，在不同的介质中，波的传播速度发生了变化，导致传播方向发生偏折，有的学生在观察实验的过程中不禁产生疑问，水深和波速之间有什么关系呢？

由于是教材新增内容，许多教师并不清楚二者之间的关系．还有些教师知道浅水波波速公式 $v=\sqrt{gh}$，其中 h 为水深，但如果学生继续追问，往往不能回答．现将浅水波波速公式的推导过程整理如下，以解师生困惑．

2　简谐波的波函数与一维线性波动方程

波函数和波动方程都可以定量地描述任意时刻离波源任意距离处的质点的振动情况，设有一列平面简谐波沿 x 轴传播，如图 2 所示，振动方向均沿 ξ 坐标轴方向，平面简谐波振动量 ξ 是位置 x 和时间 t 的函数，即有 $\xi=\xi(x,t)$．取 O 点为坐标原点，其振动方程为 $\xi(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi)$，其中 A 为振幅，ω 为角频率，φ 为初相位．若波在介质中的传播速度为 v，则在传播方向上坐标为 x 的质点的振动波函数为

$$\xi(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right] \tag{1}$$

其一维线性波动方程为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0 \tag{2}$$

式(1)所表示的波函数在高中阶段使用更为普遍，为简谐波的运动学方程，波的形成有其动力学原因，分析介质的动力学结构，可以推导出式(2)所示的波动方程，二者都可以来描述简谐波的规律．

图 2　一列平面简谐波沿 x 轴传播

3　浅水波的波速公式

3.1　浅水波

设水面到水底的深度 h，水波的波长为 λ，一般把 $h\ll\lambda$ 的水波称为浅水波．

3.2　研究对象的界定

如图 3 所示，在近水底处沿质点水平振动方向设置 x 轴，无波动时取 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 一小段水柱作为研究对象，设该水柱在垂直于 xz 平面方向的厚度为 b. 有波动时，侧面 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的水平位移分别记为 $\xi(x,t)$ 和 $\xi(x+\mathrm{d}x,t)$，侧面 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的竖直方向的升高量分别记为 $\eta(x,t)$ 和 $\eta(x+\mathrm{d}x,t)$.

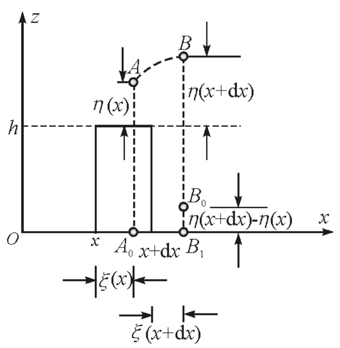

图 3　确定研究对象

我们仅讨论液体体积不可压缩的情形，即小水柱体积不变，有

$$b h\,\mathrm{d}x=b[h+\eta(x,t)]\cdot[\mathrm{d}x+\xi(x+\mathrm{d}x,t)-\xi(x,t)] \tag{3}$$

$$b h\,\mathrm{d}x=b[h+\eta(x,t)]\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}x+\xi(x+\mathrm{d}x,t)-\xi(x,t)}{\mathrm{d}x}$$

$$b h\,\mathrm{d}x=b[h+\eta(x,t)]\mathrm{d}x\cdot\left[1+\frac{\xi(x+\mathrm{d}x,t)-\xi(x,t)}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$b h\,\mathrm{d}x=b[h+\eta(x,t)]\mathrm{d}x\cdot\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$$

约分得　$h=[h+\eta(x,t)]\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)$

整理得

$$\eta(x,t)=-[h+\eta(x,t)]\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{4}$$

推导中考虑到 $\eta(x,t)\ll h$，有

$$\eta(x,t)=-h\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{5}$$

对 x 求偏导有

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-h\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{6}$$

3.3　小水柱的受力情况分析

水柱在水平方向的振动加速度是由两侧重力压强形成的压力差提供. 在图 2 中，A 和 B 两处的压强同为大气压 p_0，因为竖直升高高度的不同，接近水面处的上表面不平，水柱水面处水平方向的压力为 $p_0 b[\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)]$，水柱接近水底处的压强也不同，左侧面 AA_0 压强分布和右侧 BB_0 段分布相同，B_0B_1 段的压强可以近似为 $p_0+\rho g h$. 水柱水底处水平方向的压力为

$$F=(p_0+\rho g h)b[\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)]$$

水柱沿 x 方向所受的净压力为

$$\mathrm{d}F_x=p_0 b[\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)]-(p_0+\rho g h)b[\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)] \tag{7}$$

$$\mathrm{d}F_x=-\rho g h b[\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)]$$

$$\mathrm{d}F_x=-\rho g h b\,\mathrm{d}x\,\frac{\eta(x+\mathrm{d}x,t)-\eta(x,t)}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}F_x=-\rho g h b\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial\eta}{\mathrm{d}x}$$

将式(6) 代入，有

$$\mathrm{d}F_x=\rho g h^2 b\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{8}$$

3.4　对小水柱列动力学方程

根据质心运动定理 $\mathrm{d}F=\mathrm{d}ma$，其中

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho h b\,\mathrm{d}x$$

$$a_x=\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{d}F_x=\rho g h^2 b\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\rho h b\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{9}$$

整理得

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-gh\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0 \tag{10}$$

对比式(2) 所示一维线性波动方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-v^2\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0$$

求得　$v=\sqrt{gh}$

其中 h 为水深，推导完毕.

参 考 文 献

1　石道明. 水波中质点的运动分析[J]. 柳州师专学报，1994(02)

2　刘葵林，安宏彬，廖红. 水波中质元的运动分析[J]. 湖南中学物理，2013 (08)

3　舒幼生. 力学(物理类)[M]. 北京：北京大学出版社，2005. 273，287，288

4　张利国，王丹，史红姝. 通过中学物理实验发展学生科学思维 —— 以“探究功与速度变化的关系”为例[J]. 物理通报，2019(S2)：94 ～ 97