论“平均安培力”快速解题的依据及可靠性

张　旭　　农艳鸯

（柳州市第二中学　广西 柳州　545001）

（收稿日期：2020－09－18）

摘　要：在解决部分安培力做功问题时，发现用“匀变速”平均值思想也能准确解题，对“匀变速”平均值思想解题依据和可靠性进行了分别分析讨论和拓展，发现虽为变力做功，但只要出现线性关系，在特定的一些问题上会出现快速可靠的解法．

关键词：安培力　平均值　做功

1　引言

在高考中采用不同方法和手段分析、处理信息进而准确而又快速地解决问题是学生应该要掌握的科学思维．教师作为学生的引导者，在学生已经掌握的情况下，如何引导学生去探究发现一些快速可靠的解法也应该是广大中学物理教师的一门必修课．这里我们从 2020 年柳州市二模的一道选择题引入，讨论一下安培力在哪些情况下可以用“平均值法”解题．

【**例 1**】（2020 年柳州市二模第 21 题）如图 1 所示，宽为 L 的平行光滑金属导轨 MN 和 PQ 由圆弧部分和水平部分平滑连接，右端接阻值为 R 的定值电阻，水平轨道的左边部分矩形区域内有竖直向上、大小为 B 的匀强磁场．在圆弧部分的某一高度 h 处由静止释放一根金属棒，金属棒到达磁场右边界处恰好停止．已知金属棒质量为 m，电阻为 $\frac{R}{2}$，与导轨始终垂直接触良好．导轨电阻不计，重力加速度为 g．则在整个运动过程中（　　）

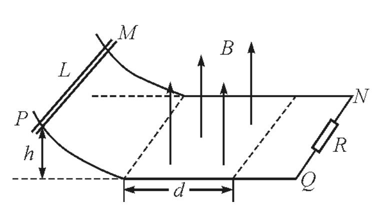


图 1　例 1 题图

A. 通过电阻的最大电流大小为 $\frac{2BL\sqrt{2gh}}{3R}$

B. 金属棒两端的最大电压为 $BL\sqrt{2gh}$

C. 磁场区域长度 $d=\frac{3mR\sqrt{2gh}}{2B^2L^2}$

D. 右端电阻 R 产生的焦耳热为 mgh

答案：A，C.

解：由题意得

$$mgh-W_{安}=0\quad mgh=\frac{1}{2}mv^2\quad v=\sqrt{2gh}$$

$$\varepsilon=BLv\quad i=\frac{2BL\sqrt{2gh}}{3R}$$

故选项 A 对．

针对选项 C，设导轨进入磁场速度为 v，从静止释放到进入磁场前由动能定理有如下解法．

常规答案解法：

$$-B\sum_{i=1}^{n}i_iL\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=0-mv \tag{1}$$

$$q=\sum_{i=1}^{n}i_i\Delta t_i \tag{2}$$

$$q=\frac{3BL\sum_{i=1}^{n}d_i}{2R} \tag{3}$$

令
$$d=\sum_{i=1}^{n}d_i$$

得
$$d=\frac{3mR\sqrt{2gh}}{2B^2L^2}$$

平均值解法：

$$mgh=\sum_{i=1}^{n}F_{安i}d_i=\overline{F_{安}}d=\frac{3B^2L^2\bar{v}d}{2R} \tag{4}$$

$$\bar{v}=\frac{v_0+v_t}{2}=\frac{0+\sqrt{2gh}}{2} \tag{5}$$

得　$$d=\frac{3mR\sqrt{2gh}}{2B^2L^2}$$

2　讨论与证明

平均值法解得的 d 的结果跟目前普遍标准答案结果一样，但是对于平均值解法过程用到的 $\bar{v}=\frac{v_0+v_t}{2}$ 明显是错误的，因为这个平均速度公式只适用于匀变速直线运动，而题中的情景是安培力使导体棒不断减速至零，同时安培力也不断减小到零的过程，明显是个变力做功过程. 但是为何一个匀变速直线运动的公式在这个变力做功过程中使用也得到了正确答案？值得深思. 是巧合正确，还是背后隐藏着某种数学关系使得它也呈现出这种匀变速直线运动的规律？这里我们不妨用数学逻辑证明一下，它们的确存在数学线性关系.

如图 2 所示，假设光滑导体棒 ab 以初速度 v_0 向右运动，匀强磁场磁感应强度为 B，导体棒电阻为 R，其余电阻不计，求安培力与导体棒 ab 运动位移的关系.

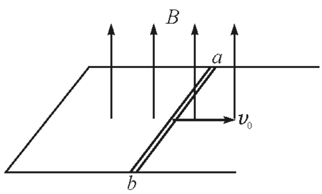


图 2　证明用图

证明：

方法 1：微积分证明

$$\frac{B^2L^2v}{R}=-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

解得　$$v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \tag{7}$$

设 t 时刻安培力为

$$F=BiL=\frac{B^2L^2v}{R}=\frac{B^2L^2v_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \tag{8}$$

t 时刻向前的位移

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\mathrm{d}t=\frac{mRv_0}{B^2L^2}-\frac{mRv_0}{B^2L^2}\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \tag{9}$$

由式(8)、(9) 可知

$$x=\frac{mRv_0}{B^2L^2}-\frac{mRv_0}{B^2L^2}\frac{FR}{B^2L^2v_0}$$

即　$$x=\frac{mRv_0}{B^2L^2}-\frac{mR^2}{B^4L^4}F$$

得到　$$F=\frac{B^2L^2v_0}{R}-\frac{B^4L^4}{mR^2}x \tag{10}$$

方法 2：采用高中方法证明

设 t 时刻，位移为 x，安培力为 F

$$-BiLt=mv-mv_0 \qquad q=\bar{i}t \qquad q=\frac{BLx}{R}$$

得　$$\frac{B^2L^2x}{R}=mv_0-mv$$

即　$$v=v_0-\frac{B^2L^2x}{mR} \tag{11}$$

则安培力

$$F=BiL=\frac{B^2L^2v}{R}=\frac{B^2L^2v_0}{R}-\frac{B^4L^4x}{mR^2} \tag{12}$$

以上两种证明结果是一致的，都说明该过程的变力安培力与位移成一次函数关系. 如图 3 所示，在这种一次函数图像中，我们很容易用三角形或者梯形面积求出该过程中变力安培力做的功. 也可以从表 1 中 $v-t$ 图像和 $F-x$ 图像对比理解. 类比 $v-t$ 图像我们得到了如式(14) 瞬时速度与位移的对应关系，式(15) 做功与位移的对应关系，式(16) 做功与瞬时速度以及位移的对应关系.

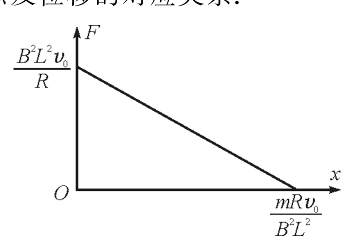
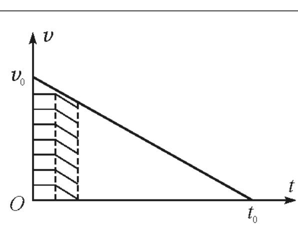
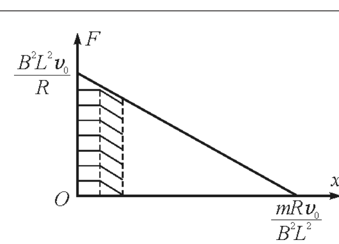


图 3　$F-x$ 成一次函数关系

表 1　$v-t$ 图像与 $F-x$ 图像对比

$v-t$	$F-x$
	

续表 1

$v-t$	$F-x$	
$\frac{dv}{dt}=a$	$\frac{dF}{dx}=k=\frac{B^4L^4}{mR^2}$	(13)
$v=v_0-at$	$F=F_0-kx$ 即 $\frac{B^2L^2v}{R}=\frac{B^2L^2v_0}{R}-\frac{B^4L^4}{mR}x$	(14)
$s=v_0t-\frac{1}{2}at^2$	$W=F_0x-\frac{1}{2}kx^2=\frac{B^2L^2v_0}{R}x-\frac{B^4L^4}{2mR}x^2$	(15)
$s=\overline{v}t=\frac{v_0+v_t}{2}t$	$W=\overline{F}x=\frac{B^2L^2}{R}\frac{v_0+v_t}{2}x$	(16)

3 匀变速运动时

如图 4 所示，当光滑导体棒受到一个变力 F 从静止开始向右做加速度为 a 的匀加速运动. 此时导体棒做匀变速运动，速度 $v=at$ 与时间 t 之间本身就是线性关系，很明显这种情况下安培力能用“平均值法”这种快速解法思想解题.

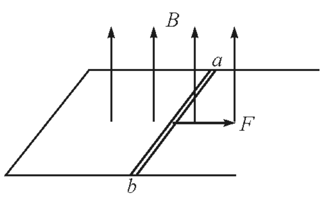


图 4 导体棒做匀加速运动

4 不存在线性关系的情况

如图 4 所示，当光滑导体棒受到一个恒力 F 从静止开始向右运动时，$F-\frac{B^2L^2v}{R_{总}}=m\frac{dv}{dt}$，很明显此时安培力与 x 或者 t 都不存在线性关系，那么这种情况下不能用“平均值”这种快速解法.

但是以上无论是否存在线性关系，由于 $dF_{安}=\frac{B^2L^2}{R_{总}}dv$ 以及 $x=\overline{v}t$ 总成立，因此 $\frac{B^2L^2}{R_{总}}x=\overline{F_{安}}t$ 式总是成立的，所以一旦涉及到安培力的冲量的问题，平均安培力的冲量与位移成线性关系，也是可以用“平均值”思想的，如例 2 所示.

5 平均值方法解题应用拓展

【例 2】如图 5 所示，两根平行光滑金属导轨固定在水平桌面上，左边连接定值电阻 $R=2\ \Omega$，导轨间距 $L=1$ m. 整个装置处在方向竖直向下的匀强磁场中，磁感应强度 $B=2$ T. 一质量 $m=1$ kg、电阻 $r=1\ \Omega$ 的金属棒放在导轨上，在外力 F 的作用下以恒定的功率 $P=12$ W 从静止开始运动，当运动距离 $x=3$ m 时金属棒达到最大速度，此时撤去外力，金属棒最终停下，设导轨足够长. 求：在这个过程中，外力的冲量大小？

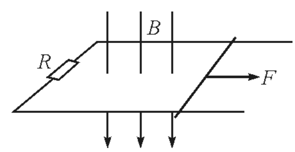


图 5 例 2 题图

解法 1：金属棒速度最大时，所受合外力为零，即

$$BiL=F$$

感应电流 $$i=\frac{E}{R+r}=\frac{BLv_m}{R+r}$$

根据电功率的计算公式

$$P=Fv_m$$

联立解得 $$v_m=3\ \text{m/s}$$

设外力的冲量为 $I_{冲}$，作用时间为 t，根据动量定理可得

$$I_{冲}-BiLt=mv_m-0$$

其中 $$i=\frac{E}{R+r}=\frac{BLv}{R+r}$$

所以有 $$I_{冲}-\frac{B^2L^2\overline{v}t}{R+r}=mv_m-0$$

运动距离 $$x=\overline{v}t=3\ \text{m}$$

代入数据解得 $$I_{冲}=7\ \text{N}\cdot\text{s}$$

解法 2：设 F 作用时间为 t_1，位移为 x，撤去 F 后运动到停的时间为 t_2 位移为 d.

在撤去 F 阶段，由

$$\frac{B^2L^2}{R+r}\left(\frac{0+v_m}{2}\right)d=\frac{1}{2}mv_m^2 \tag{17}$$

得 $$d=\frac{9}{4}\ \text{m}$$

又由 $$\frac{B^2L^2}{R+r}\left(\frac{0+v_m}{2}\right)d=\frac{1}{2}mv_m^2$$

可化简为
$$\frac{B^2L^2}{R+r}d=mv_{\mathrm{m}}=\overline{F_{安}}t_2 \tag{18}$$

对全程列式,由
$$Ft_1-\overline{F_{安}}(t_1+t_2)=0$$

可得
$$Ft_1=\overline{F_{安}}(t_1+t_2)=$$
$$\frac{B^2L^2}{R+r}(x+d)=7\ \mathrm{N\cdot s} \tag{19}$$

【例 3】 如图 6 所示,电阻不计,间距为 L 的光滑平行金属导轨水平放置. 导轨左端接有阻值为 R 的电阻. 以导轨的左端为原点,沿导轨方向建立 x 轴,导轨处于竖直向下的磁感应强度大小为 B 的匀强磁场中. 一根电阻也为 R,质量为 M 的金属杆垂直于导轨置于 x_0 处,不计金属杆与导轨间的接触电阻,现给金属杆沿 x 轴正方向的初速度为 v_0,金属杆刚好能运动到 $2x_0$ 处,在金属杆的运动过程中(　　)

A. 通过电阻 R 的电荷量为$\frac{BLx_0}{2R}$

B. 金属杆产生的焦耳热为$\frac{1}{2}mv_0^2$

C. 金属杆克服安培力所做的功为$\frac{1}{2}mv_0^2$

D. 金属杆运动到 $1.5x_0$ 处的速度大小为$\frac{v_0}{2}$

答案:A,B,D.

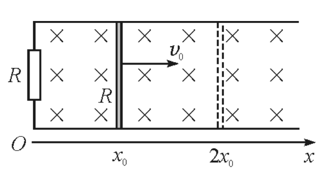


图 6　例 3 题图

这里我们只讨论选项 D.

解法 1:对于选项 D,由
$$-B\sum_{i=1}^{n}i_iL\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=0-mv_0$$
$$q=\sum_{i=1}^{n}i_i\Delta t_i \qquad q=\frac{BL\sum_{i=1}^{n}x_i}{R}$$

令
$$x_0=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

得
$$\frac{B^2L^2x_0}{2R}=mv_0 \tag{20}$$

当滑到 $1.5x_0$ 处时,设速度为 v,时间为 t_1
$$-BiLt_1=mv-mv_0$$

得
$$\frac{B^2L^2\frac{x_0}{2}}{2R}=mv \tag{21}$$

由式(20)、(21)得 $v=\frac{v_0}{2}$.

解法 2:
$$\frac{B^2L^2\bar{v}}{2R}\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2 \tag{22}$$
$$\frac{B^2L^2\left(\frac{v_0}{2}\right)}{2R}x_0=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{23}$$

由式(23)有
$$\frac{B^2L^2\left(\frac{x_0}{2}\right)}{2R}=\frac{1}{2}mv_0 \tag{24}$$

式(24)代入式(22)得到方程
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mv_0v-\frac{1}{4}mv_0^2=0 \tag{25}$$

解方程得
$$v=\frac{v_0}{2}$$

或
$$v=-v_0(舍去)$$

解法 3:采用表 1 中式(14)直接代入求解

当位移为 x_0 时速度为零
$$0=\frac{B^2L^2v_0}{R}-\frac{B^4L^4}{mR}x_0 \tag{26}$$

当位移为$\frac{x_0}{2}$时速度为 v
$$\frac{B^2L^2v}{R}=\frac{B^2L^2v_0}{R}-\frac{B^4L^4}{mR}\frac{x_0}{2} \tag{27}$$

联立式(26)、(27)得 $v=\frac{v_0}{2}$.

6　总结

综上所述可以得出,安培力"平均值法"在解题中有方便快捷的作用. 对于其正确性,主要是基于:第一,当安培力随位移成一次线性函数关系成立时;第二,平均值本就是一种等效替代的思想. 文中总结了 3 种情况下安培力"平均值法"可以应用:第一,导体棒只受到安培力做减速运动时;第二,有外力,但导体棒做匀变速运动时;第三,涉及用到安培力的冲量时."平均值法"为学生在解决安培力的选择题提供了又快又准的解决方法.

参考文献

1　饶季华. 例析微元法求解安培力的累积效果问题[J]. 物理教学,2020,42(2):61 ～ 64

2　张贤祺. 是错解巧合还是殊途同归[J]. 中学物理教学参考,2016,45(9):60 ～ 60

3　马桂君. 怎样用平均值来代替变化的物理量进行求解[J]. 物理教学,2013,35(9):7 ～ 9