基于物理观念 突出问题本质 强化科学思维

—— 对一道物理复赛理论题解法的分析思考

陈鸿翔

（湖州市菱湖中学　浙江 湖州　313018）

（收稿日期：2020 - 10 - 02）

摘　要：对第35届全国中学生物理复赛理论题第2题所涉及的物理模型与命题思想进行简单的评述，从运动与相互作用观念的角度对该问题所涉及的动力学特征进行分析，并在拓展解题思路与方法上突出小球沿水平面做机械振动的物理本质，从而为学生解决问题、强化思维能力提供一定的参考与帮助.

关键词：物理复赛　机械振动　运动方程　数列求和

1　问题呈现与命题分析

第 35 届全国中学生物理复赛理论题第 2 题呈现如下.

【原题】 如图 1 所示，劲度系数为 κ 的轻弹簧左端固定，右端连一质量为 m 的小球；弹簧水平，它处于自然状态时，小球位于坐标原点 O；小球可在水平地面上滑动，它与地面之间的动摩擦因数为 μ. 小球初始速度为零，将此时小球相对于原长的伸长量记为 $-A_0$（$A_0 > 0$，但 A_0 并不是已知量）. 重力加速度大小为 g，假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力.

（1）如果小球至多只能向右运动，求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（2）如果小球完成第一次向右运动至原点右边后，至多只能向左运动，求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（3）如果小球只能完成 n 次往返运动（向右经过原点，然后向左经过原点，算 1 次往返），求小球最终静止的位置和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（4）如果小球只能完成 n 次往返运动，求小球从开始运动直至最终静止的过程中运动的总路程.

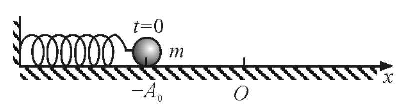


图 1　原题题图

根据题意可知小球的运动是以 O 点为平衡位置的机械振动，但由于摩擦力的作用，小球的振动并不是简谐运动. 因此，命题者的初衷只是以小球振动为

负，当轴线上某点的场强取正值时，表示该点处的场强方向与规定的正方向相同；当轴线上某点的场强取负值时，表示该点处的场强方向与规定的正方向相反. 横轴上的某点对应两个图像的数值之和的绝对值表示该点合场强的大小，两个数值之和的正负表示该点合场强的方向. 要注意两个圆环之间的距离与极值条件 $\sqrt{2}R$ 之间的大小关系包括 3 种情形，若数量关系不同，则两个图像叠加的效果不同，因此需画出两种一般情形的图像，但在画图像之前应首先规定电场强度的正方向. 在用图像叠加法解答有关均匀带电双圆环静电场问题时，关键是在轴线上找到所有的场强为零的点，即合场强方向的转折点，由此可判断场强的变化情况以及电势的变化情况，显得形象直观，巧妙快捷. 虽然这种图像法具有一定的难度，但比定量推导的方法要简便很多，实际是解答这类问题的最佳方法.

参 考 文 献

1　郑金. 探究几种均匀带电体的场强及最大值. 物理通报，2014(S2)：59 ～ 61

2　蔡本再. 电场问题的等效法处理[J]. 中学物理，2013，31(8)：79 ～ 80

3　汪海林. 对一道电势变化问题的讨论[J]. 物理之友，2018，34(2)：43 ～ 44

4　杨军. 双带电圆环轴线上电场强度和电势的分布探究[J]. 物理教师，2017，38(7)：66 ～ 67

运动形式,考查学生对功能关系与牛顿运动定律的运用.从问题解析的角度与素养考查的要求来看,这样的求解方式也体现了在运动与相互作用观念、能量守恒观念方面的考查,但却忽略了对于问题中物理本质的探讨.虽然无法使用简谐运动的动力学规律直接处理小球振动全过程的运算分析,但是由于小球运动过程中所受摩擦力大小恒定不变,通过细化小球机械振动的单向运动过程,可将小球向右或者向左的运动等效为简谐运动的子过程,且该运动的子过程所需时间为小球沿光滑水平面做简谐运动的$\frac{1}{2}$ 周期[1].

因此,要系统地解决该问题,必须要从振动的动力学本质出发,以运动和相互作用的物理观念为指导,运用矢量分析法,结合数学工具 —— 振动的微分方程得出小球沿水平面做机械振动的运动学关系式,进而通过类比归纳的方式解决小球最终静止位置 x 与弹簧初始形变量 A_0 的关系.故可构建解决问题的核心素养导向与要求的脉络图如图 2 所示.

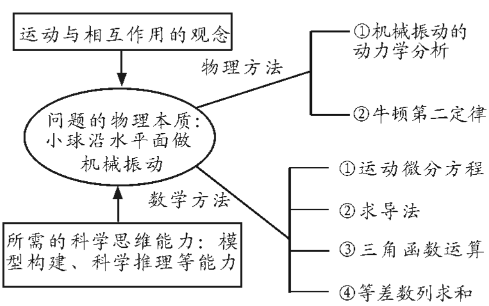
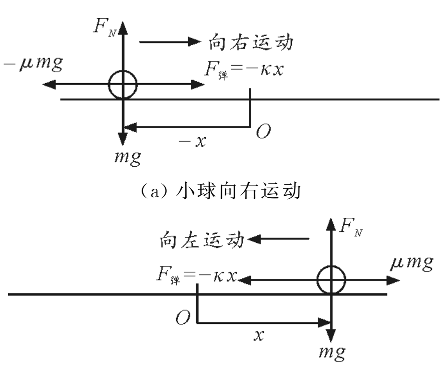


图 2 问题解决的核心素养脉络图

2 基于问题物理本质下的解法探讨与呈现

2.1 对小球静止位置 x 与 A_0 所满足条件的求解

根据运动与相互作用观念指导下的解析要求,需对小球向右与向左运动过程进行受力分析与运动分析,其受力分析如图 3 所示.



(a) 小球向右运动

(b) 小球向左运动

图 3 小球做机械振动的动力学分析图

根据受力分析与运动分析,取向右为小球运动的正方向,并结合牛顿第二定律可得小球向右运动时的动力学微分方程为

$$-\kappa x-\mu mg=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

整理以后有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x+\mu g=0$$

其中

$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

因此可得小球运动学方程为

$$x=A\sin\left(\omega t+\varphi\right)-\frac{\mu mg}{\kappa}\tag{1}$$

列出小球向左运动时的动力学微分方程

$$-\kappa x+\mu mg=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

同理可得小球向左运动时的运动学方程为

$$x=B\sin\left(\omega t+\varphi\right)+\frac{\mu mg}{\kappa}\tag{2}$$

对式(1) 和式(2) 关于时间 t 求导可得小球运动速度 v 随时间变化的关系式分别为

$$v=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi\right)\quad v=\omega B\cos\left(\omega t+\varphi\right)\tag{3}$$

不妨设小球经第 n 次往返回到左端位置时相对于 O 点的位移为 $-A_n$,对应小球运动的初始状态,该时刻 $t=\frac{2n\pi}{\omega}$,因此结合式(1) 和式(3) 有

$$-A_n=A\sin\left(2n\pi+\varphi\right)-\frac{\mu mg}{\kappa}$$

可得

$$A=\frac{\frac{\mu mg}{\kappa}-A_n}{\sin\varphi}$$

$$v=\omega A\cos\left(2n\pi+\varphi\right)=\omega A\cos\varphi=0$$

由于小球仍能向右运动,故 $\kappa A_n>\mu mg$,因此系数 $A<0$,故 $\cos\varphi=0$,$\sin\varphi=1$,因此小球开始第 $n+1$ 次往返并向右运动时运动学方程满足

$$x=\left(\frac{\mu mg}{\kappa}-A_n\right)\cos\omega t-\frac{\mu mg}{\kappa}\tag{4}$$

根据式(4) 可得小球在 $t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega}$ 时刻到达最右端的位移

$$B_n=x=A_n-\frac{2\mu mg}{\kappa}$$

设小球在 $t=\frac{\pi}{\omega}$ 时刻到达最右端的位移为 B_0，若小球通过 O 点并且到达最右端仍能向左返回，则 $\kappa B_n>\mu mg$，故根据式(2)有

$$B_n=B\sin[(2n+1)\pi+\varphi]+\frac{\mu mg}{\kappa}$$

因此可得到小球此时向左返回时的运动学方程为

$$x=\left(\frac{\mu mg}{\kappa}-B_n\right)\cos\omega t+\frac{\mu mg}{\kappa}\tag{5}$$

若小球在第 $n+1$ 次往返中能向左通过 O 点，根据式(5)可得小球在 $t=\frac{2(n+1)\pi}{\omega}$ 时刻到达最左端的位移

$$-A_{n+1}=x=\frac{2\mu mg}{\kappa}-B_n$$

故 $A_{n+1}=A_n-\frac{4\mu mg}{\kappa}$，即

$$A_n=A_{n-1}-\frac{4\mu mg}{\kappa}$$

因此，通过类比归纳得出小球经 n 次往返运动到最左端时相对于 O 点的位移大小为

$$A_n=A_0-\frac{4n\mu mg}{\kappa}\tag{6}$$

其中 A_0 为小球运动初始时刻相对于 O 点的位移大小，即弹簧初始时刻的形变量大小，因此 A_n 也可理解为弹簧经小球 n 次往返后的形变量大小.

因此，小球开始第 $n+1$ 次往返至右端的最大位移 B_n 的大小满足

$$B_n=A_0-\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}\tag{7}$$

根据以上分析可得到小球做机械振动的位移-时间图像如图 4 所示.

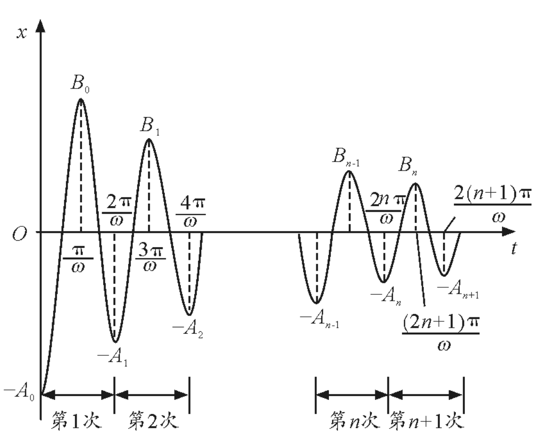


图 4　小球做机械振动的位移-时间图像

根据图 4 并结合式(6)和式(7)可得到小球经 n 次往返运动后所静止的位置 x 及 A_0 所满足的条件为

(1) 若小球第 n 次往返中向左通过 O 点并不再向右返回，则

$$-A_n<0\qquad \kappa A_n\leqslant\mu mg$$

故有

$$\frac{4n\mu mg}{\kappa}<A_0\leqslant\frac{(4n+1)\mu mg}{\kappa}$$

此时小球静止于

$$x=-A_n=\frac{4n\mu mg}{\kappa}-A_0<0$$

(2) 若小球开始第 $n+1$ 次往返并向右运动但未通过 O 点，则 $\kappa A_n>\mu mg$，$B_n\leqslant 0$，故有

$$\frac{(4n+1)\mu mg}{\kappa}<A_0\leqslant\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}$$

此时小球静止于 $x=B_n=A_0-\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}\leqslant 0$；

(3) 若小球开始第 $n+1$ 次往返向右通过 O 点，但不再向左运动，则 $B_n>0$，$\kappa B_n\leqslant\mu mg$，故有

$$\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}<A_0\leqslant\frac{(4n+3)\mu mg}{\kappa}$$

此时小球静止于

$$x=B_n=A_0-\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}>0$$

(4) 若小球在第 $n+1$ 次往返中向左运动但未通过 O 点，则 $-A_{n+1}\geqslant 0$，$\kappa B_n>\mu mg$，故有

$$\frac{(4n+3)\mu mg}{\kappa}<A_0\leqslant\frac{4(n+1)\mu mg}{\kappa}$$

此时小球静止于

$$x=-A_{n+1}=\frac{2(2n+1)\mu mg}{\kappa}-A_0\geqslant 0$$

点评：解决动力学问题，最能突出问题物理本质的求解方法是给出物体运动的动力学方程与运动学方程，并结合物体随时间变化的运动图像，从而能够在任意时刻描述物体的受力情况与运动情况. 尽管在高中阶段的机械振动问题中引入运动的微分方程要求较高，但对于中学物理竞赛而言，适当的数学方法的应用与拓展有助于加深学生对物理模型建构与定量解析的认识，并加强学生的科学思维.

2.2　运用数列求和计算小球运动全过程的路程

从深化学生物理观念与深度培养学生科学思维的角度来说，最好的方法就是拓展问题已有的解法，从而在丰富问题本身物理涵义的基础上对答题的思

路与角度加以延伸，使学生在观念上予以认同，思维上获得感知.

由于小球在运动过程中所受的摩擦阻力大小恒定不变且已知，因此，在求解路程的常规方法上选择能量守恒定律，即弹簧弹性势能的减少量等于小球克服摩擦力阻力的功，即

$$\frac{1}{2}\kappa A_0^2 - \frac{1}{2}\kappa x^2 = \mu mgs$$

但由于小球往返运动中相对于 O 点向左与向右的位移满足随往返次数 n 呈现等差数列的变化规律，不妨利用等差数列求和公式来计算小球运动过程中的总路程 s.

已知小球第 n 次运动到最右端时与 O 点的距离为

$$B_{n-1} = A_0 - \frac{2(2n-1)\mu mg}{\kappa}$$

第 n 次返回最左端时与 O 点的距离为

$$A_n = A_0 - \frac{4n\mu mg}{\kappa}$$

根据上文中图 4 所示，并结合小球机械振动的往复性特点可知运动过程的总路程 s 满足

(1) 当 $\frac{4n\mu mg}{\kappa} < A_0 \leqslant \frac{(4n+1)\mu mg}{\kappa}$ 时，有

$$s = A_0 + (A_1 + \cdots + A_{n-1}) \times 2 + A_n + (B_0 + B_1 + \cdots + B_{n-1}) \times 2 = 4n\left(A_0 - \frac{2n\mu mg}{\kappa}\right)$$

(2) 当 $\frac{(4n+1)\mu mg}{\kappa} < A_0 \leqslant \frac{(4n+3)\mu mg}{\kappa}$ 时，有

$$s = A_0 + (A_1 + \cdots + A_{n-1} + A_n) \times 2 + (B_0 + B_1 + \cdots + B_{n-1}) \times 2 + B_n = 2(2n+1)\left[A_0 - \frac{(2n+1)\mu mg}{\kappa}\right]$$

(3) 当 $\frac{(4n+3)\mu mg}{\kappa} < A_0 \leqslant \frac{4(n+1)\mu mg}{\kappa}$ 时，有

$$s = A_0 + (A_1 + \cdots + A_{n-1} + A_n) \times 2 + A_{n+1} + (B_0 + B_1 + \cdots + B_{n-1} + B_n) \times 2 = 4(n+1)\left[A_0 - \frac{2(n+1)\mu mg}{\kappa}\right]$$

点评：对于有阻力作用下的机械振动其振幅逐渐减小，求解小球运动的总路程不仅需要考虑等差数列求和公式的应用，同时还需要考虑振动往复性与运动反向前后行进路程大小的对称性，故不能简单地对数列 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 求和. 因此，该方法对机械振动的运动本质探讨更深入，虽然在模型的构建上与解析上有更高的要求，但对于学生思维与推理能力的锻炼能起到更好的作用与效果.

参考文献

1 丁岳林. 从一道高考模拟题谈阻尼振动的等效处理[J]. 物理通报，2012，31(3)：96 ～ 98

Based on Physical Concepts, Highlighting Issue Essence, Strengthening Scientific Thinking

——Analysis and Thinking on the Solution of a Physical Rematch Theory Problem

Chen Hongxiang

(Ling Hu High School, Huzhou, Zhejiang 313018)

Abstract: This paper makes a brief comment on the physical model and the idea of proposition involved in question 2 of the 35th National Physics Rematch for middle school students. The dynamic characteristics involved in this problem are analyzed from the viewpoint of motion and interaction. At the same time, the physical essence of the mechanical vibration of the ball along the horizontal surface is highlighted to solve problems for the students and strengthen their thinking ability to provide certain reference and help.

Key words: physical rematch; oscillation; equations of motion; summation of sequence