大学物理教学

对有关科里奥利力的疑难问题探讨

郑　金

（凌源市职教中心　辽宁 朝阳　122500）

（收稿日期:2020－10－16）

摘　要:对科氏加速度与科里奥利力的方向如何判断以及科氏加速度与科里奥利力的关系等疑难问题进行了探讨,对有关科里奥利力的两个具体问题给出比较简单的解答方法.

关键词:科里奥利力　科氏加速度　约束轨道　落体偏东

1　引出问题

如图1所示[1],水平圆盘以角速度 ω 绕圆心匀速转动,若质点在沿半径方向的光滑直槽里相对于圆盘以速度 v_r 做离心运动,则受到槽壁的弹力作用,产生横向加速度即科氏加速度,公式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

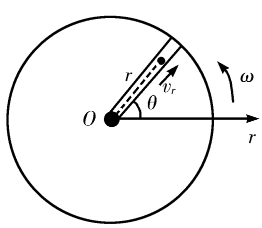

图1　水平转盘上的相对运动

由牛顿第二定律可知,质点受到槽壁的弹力即约束反力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}=2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

质点相对于圆盘做匀速直线运动,若以圆盘为参考系,则质点受力平衡,因此,在垂直于轨道方向,还受到一个反向的惯性力,即科氏力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

对于“落体偏东”现象,在非惯性系中,物体受到科氏力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

应用右手螺旋定则可判断科氏力的方向向东,则科氏加速度的方向也向东,且公式为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}=-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

为何科氏加速度有两个公式?如何判断科氏力的方向?科氏加速度与科氏力是否遵循牛顿第二定律?

2　解决问题

出现问题的根源在于是否存在约束轨道,或者说相对运动的质点是否受到刚性约束.若存在约束轨道,则相对运动质点受到约束反力,产生科氏加速度,与科氏力的方向相反;若不存在约束轨道,则相对运动质点在非惯性系中受到科氏力,产生科氏加速度,与科氏力的方向相同.由此可见,科氏加速度不一定由科氏力产生,科氏加速度与科氏力不一定遵循牛顿第二定律.因此可用多种方法判断科氏力的方向.

2.1　利用假设法判断科氏力的方向

对于在赤道上方自由下落的小球,假设小球在固定于赤道地面的竖直细管内运动,由于地球的自转,小球受到垂直于细管的约束反力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}=2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

应用右手螺旋定则可知约束反力的方向向西,实际是细管侧壁对小球产生向西的弹力.这表明,自由下落的小球有向东偏转的趋势,若没有竖直细管的约束,则小球将向东偏转,出现“落体偏东”现象,由此认为自由落体受到科氏力的方向向东.

2.2　利用矢量式表示科氏力的方向

无论相对运动质点是否受到转动物体的刚性约束,科氏力公式都为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

反映了各矢量的方向关系.地球自转方向由西向东,对于从赤道地面竖直上抛的小球,若不受刚性约束,

则受到科氏力为

$$\boldsymbol{F}_C=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

应用右手螺旋定则并考虑负号即可判断小球受到向西的科氏力，因此科氏加速度的方向向西.若小球在固定的足够长的竖直细管内上抛，考虑到地球自转方向，与图1情境进行类比可知小球受到管壁向东的弹力，即受到约束反力的方向向东，因此科氏加速度的方向向东，或者利用公式

$$\boldsymbol{F}_n=2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

判断，结果相同.

虽然科氏力只有一个公式，但科氏加速度可有两个公式，而且科氏加速度与科氏力的方向有时相同，有时相反.因此可利用科氏加速度的方向来判断科氏力的方向，但需根据相对运动物体是否受到刚性约束来确定科氏加速度公式不同的叉积形式.

3　例题分析

【例 1】如图2所示[1]，用位于竖直平面内的圆周表示地球的一条经线，竖直直径表示地轴，上端为北极.已知地球自转角速度为 ω，半径为 R.假设在北半球有一段铁路与经线重合，在北纬 30°，列车由北向南匀速行驶，相对于地面的速度大小为 v，试求列车科氏加速度的大小和方向以及科氏力的方向.

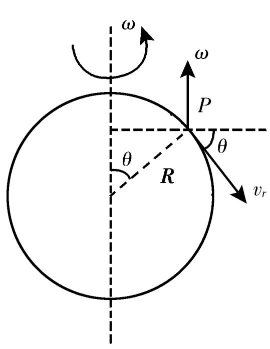

图 2　例 1 情境图

解析：由于地轴上方为北极，则地球按逆时针方向(俯视)自转，由右手螺旋定则可知角速度矢量的方向竖直向上.在北纬 30°，地球半径与地轴的夹角 $\theta=60°$，列车相对于经线的速度大小 $v_r=v$，沿切线方向，即与水平方向的夹角 $\theta=60°$，则角速度矢量与相对速度的夹角

$$\beta=90°+\theta$$

科氏加速度公式为

$$\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

可知科氏加速度的大小为

$$a_C=2\omega v_r\sin\beta=2\omega v\cos\theta=\omega v$$

结合科氏加速度公式和图2中两个矢量的方向，应用右手螺旋定则可知科氏加速度的方向垂直于圆面向里，即垂直于轨道沿地面向东.由于列车受到刚性约束，则科氏力与科氏加速度的方向相反.

对于因空气对流形成的贸易风，不受地球的刚性约束，只受到科氏力 $\boldsymbol{F}_C=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，在北半球，地面附近的气流由北极向赤道推进，则地球自转角速度矢量与气流相对速度的夹角为钝角，如图2所示，应用右手螺旋定则并考虑负号可知科里奥利力的方向垂直于圆面向外，即沿地面向西，使气流向西偏转，由此形成东北贸易风[1].

【例 2】[2]在赤道上方 200 m 处，从静止的直升飞机上自由下落一小球，不计空气阻力和风力，试求：小球落地位置将向东偏离其正下方地面位置多远？

解析：科里奥利力的大小与相对速度成正比，方向始终与相对速度垂直，类似于带电粒子在匀强磁场中受到的洛伦兹力，由此可联想到带电小球在水平方向的匀强磁场中自由下落的运动.小球相对于地球赤道下落的初速度为零，可等效为在水平方向的两个反向初速度 v_1 和 v_2，且 $v_1=v_2=v_0$，如图3所示[2].

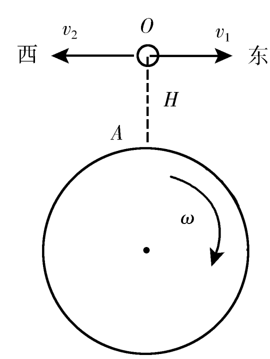

图 3　分解小球初速度

小球不受地球的刚性约束，在非惯性系中受到科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_y=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_x$$

地球自转的角速度矢量方向垂直于圆面向里，应用右手螺旋定则并考虑负号可知这两个初速度分别产生向上的科里奥利力 F_1 和向下的科里奥利力 F_2.若使向上的科里奥利力跟重力抵消，即

$$F_1=2m\omega v_1=mg$$

则小球的一个分运动是水平向右的匀速直线运动，速度 $v_x=v_1=v_0$，剩下的力为科里奥利力 F_2，始终与相对速度 v_2 垂直，且大小恒定，因此充当向心力，则小球的另一个分运动是在竖直面内沿逆时针方向的匀速圆周运动，如图 4 所示[2].

由向上的科氏力跟重力抵消，即

$$F_1=2m\omega v_1=mg$$

得匀速运动速度 $v_0=\dfrac{g}{2\omega}$

由向下的科氏力提供向心力，即

$$F_2=2m\omega v_2=m\frac{v_0^2}{r}$$

得圆周半径 $r=\dfrac{v_0}{2\omega}=\dfrac{g}{4\omega^2}$

可知角速度 $\omega'=\dfrac{v_0}{r}=2\omega$

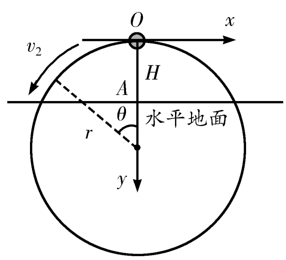

图 4　一个分运动是圆周运动

以初始位置 O 为坐标原点，建立一个相对于地球静止的非惯性坐标系如图 4 所示，利用运动的合成可知小球位移的参数方程为

$$x=v_0t-r\sin\theta=v_0t-r\sin(\omega't)$$
$$y=r-r\cos\theta=r-r\cos(\omega't)$$

即为[2]

$$x=\frac{g}{2\omega}t-\frac{g}{4\omega^2}\sin(2\omega t)$$

$$y=\frac{g}{4\omega^2}-\frac{g}{4\omega^2}\cos(2\omega t)$$

由于 $\theta=2\omega t$ 很小，则由泰勒级数展开式可知

$$\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{3!}=\theta-\frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2!}=1-\frac{\theta^2}{2}$$

代入位移方程中可得

$$x=\frac{1}{3}\omega gt^3\qquad y=\frac{1}{2}gt^2$$

令 $y=H$，可得

$$x=\frac{2}{3}\omega H\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

其中 $\omega\approx7.27\times10^{-5}$ rad/s，$H=200$ m，取 $g=9.78$ m/s^2，可得 $x\approx6.2$ cm[2].

这种解法是利用运动的合成与分解法以及等效法，所得精确结果与常规解法所得结果完全相同，殊途同归，不仅避免了繁琐的微积分运算，而且还揭示了“落体偏东”的运动轨迹为一段旋轮线. 特别是利用数学中的两个近似公式对复杂的物理结果进行化简，数理结合，奇妙无比.

还可从旋轮线的角度大致画出小球的运动轨迹为一段曲线 OA'，如图 5 所示. 当 $t=0$ 时圆轮边缘上的一点 P 与坐标原点重合，可知圆轮前进的位移 OD 与转过的弧长 DP 相等，即 $v_0t=r\theta$. 若利用图 5 来分析位移的参数方程即圆轮边缘上一点 $P(x,y)$ 的坐标，则比较直观.

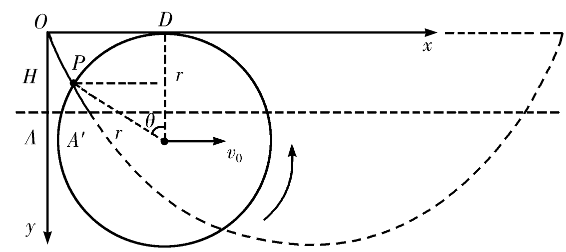

图 5　落体偏东轨迹是一段旋轮线

4　结论

总之，对于因地球自转而引起的落体偏东现象以及贸易风现象，由于相对运动物体不受地球的刚性约束，则在非惯性系中的运动方向发生偏转，原因是受到科氏力的作用，产生加速度，那么科氏加速度公式需带负号. 利用科氏力的公式和右手螺旋定则可判断科氏力的方向；也可利用假设法来判断科氏力的方向，既可对没有约束轨道的相对运动假设有约束轨道，也可对有约束轨道的相对运动假设没有约束轨道. 科氏力只存在于非惯性系，属于惯性力，只有一个公式，但科氏加速度有两个公式，分别属于不同性质的参考系，在惯性系中由约束反力产生，在非惯性系中由科氏力产生.

参 考 文 献

1　周衍柏. 理论力学教程(第 2 版)[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 28，244～255

2　吕蜂. 与其陷入微分方程 不如衷于补偿妙法[J]. 物理教师，2019，40(10)：84～86