竞赛与
物理专题研修

实例辨析感应电动势的求法

李 惠 高 洁

（株洲市第二中学 湖南 株洲 412007）

（收稿日期：2020－10－24）

摘 要：通过对一道中学物理竞赛真题中感应电动势求法的辨析，浅谈笔者对感应电动势的理解.

关键词：物理竞赛 感应电动势 动生电动势 感生电动势

笔者在平时的竞赛教学中发现学生对感应电动势的理解存在一定的误区，具体表现在哪里呢？笔者通过一道竞赛真题的讲解来举例说明.

【原题】如图1所示为一铅直竖立的磁场分布情形，成圆柱形对称.任一点的磁感应强度可表示为

$$\boldsymbol{B}=B_r\hat{r}+B_z\hat{z}=(aB_0r)\hat{r}+B_0(1-bz)\hat{z}$$

a，b，B_0 为常数.起始时，有一质量为 m，半径为 r_0 的超导体圆环静置于 $z=0$ 的水平面上，圆环中心轴和圆柱磁场中心轴重合，环中的电流为零.$t=0$ 时刻，超导体圆环无初速度释放，沿着中心轴的方向自由落下，设超导体圆环的自感为 L.求圆环内的电流 I 和时间 t 的函数关系式.

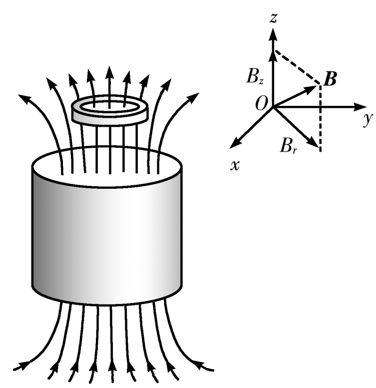

图1 题目配图

2 https://www.geogebra.org/about
3 张安军.应用微课突破物理教学难点案例——以应用GeoGebra软件演示论证向心加速度方向为例[J].高中数理化，2019(6)：40～41
4 邓莹莹，闫慧娟，张计才.GeoGebra软件在中学物理教学中的应用[J].物理通报，2019(10)：120～123，127
5 江宁.分析点光源绕凸透镜两倍焦距点圆周运动时实像的运动轨迹[J].数理化学习(初中版)，2018(12)：45～46

Applied Research on GeoGebra Software in Physics Teaching of Rural Middle Schools

Yang Zhusong

(Qingchuan Liangshui Nine-year School，Guangyuan，Sichuan 628100)

Abstract：Rural school education resources are relatively scarce，especially the experiment based discipline physics，in the lack of the corresponding demonstration and experimental inquiry under the teaching effect is relatively poor. Fortunately，with the rapid development of information technology today，the application of various information technology means will make up for this deficiency. By applying the free dynamic mathematics software Geogebra to the practice of rural junior middle school physics teaching，the author intuitively shows the physical process and processes the physical data through the visual dynamic teaching software，hoping to bring students positive，comprehensive and rigorous thinking exercise，cultivate the core quality of physics，and improve the effect of physics teaching.

Key words：physics teaching；logical thinking；GeoGebra；visualization；Internet ＋ education

1　设计问题 点亮思维的火花

为帮助学生解题，笔者设计了几个问题，其难度呈阶梯式上升，旨在循序渐进地引导学生，找到解题的思路.

问题 1：超导体有什么性质？

问题 2：请定性分析超导体圆环的运动学、动力学特点，大胆猜想圆环的运动类型.

问题 3：题设条件是磁场的空间分布，所求却是超导体圆环内的电流与时间的关系，这中间应该寻找什么作为逻辑过程的节点，把题设与所求联系起来？

笔者发现，这 3 个问题学生都能顺利回答.

1.1　对问题 1 的分析

零电阻现象和完全抗磁性是超导体两个独立的基本性质，是超导体的标志. 根据法拉第电磁感应定律，圆环自由下落后，环内一定有感应电流；同时根据基尔霍夫回路电压方程

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i + IR = 0$$

可知，因为超导体圆环的 $R=0$，圆环内的感应电动势必定为零.

1.2　对问题 2 的分析

在超导体圆环开始下落后的小段时间内，在重力作用下圆环的速度越来越大，磁通量变化率增大，导致电流增大，所受的安培力增大，圆环会有一段时间做加速度减小的加速运动，速度增大后，感应电流变大会导致竖直向上的安培力大于重力，圆环紧接着会有一段竖直向下的加速度增大的减速直线运动，这个动力学规律能让学生很快联想到竖直方向弹簧振子，振子从原长位置无初速度释放，在重力和弹簧弹力作用下做简谐振动. 超导体圆环初始位置无电流不受安培力只受重力的初始状态也跟竖直方向弹簧振子从弹簧原长处释放时不受弹力仅受重力类比. 所以，我们可以大胆猜想圆环应该做简谐振动. 弹簧振子的简谐振动如图 2 所示.

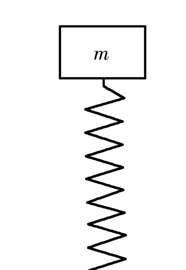

图 2　从弹簧原长处开始释放的竖直方向弹簧振子

1.3　对问题 3 的分析

如果圆环在 z 方向做简谐振动，则 $z=z(t)$ 是一个正余弦关系，因超导体圆环所受回复力是安培力（变力）和重力（恒力）的合力，所以回复力增量就是安培力增量，即超导体圆环所受的安培力 $F_{安} = F_{安}(I)$ 与 z 方向位移成是线性关系，所以，要想求出 $I=I(t)$，我们只要先找出电流大小与 z 方向位移的函数关系 $I=I(z)$ 即可.

2　学生所作的两种典型解答

典型解答 1：由上述分析可知，圆环的电动势为零. 根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Φ 是圆环内的总磁通量，它由两部分构成，一部分是圆柱形对称的外加磁场在超导体圆环内的磁通量 Φ_1

$$\Phi_1 = B_0(1-bz)\pi r_0^2 \tag{2}$$

这部分磁通量的初值为 $\Phi_{10} = B_0\pi r_0^2$.

另一部分是超导体圆环中自身的感应电流产生的磁场在环内的磁通量 Φ_2

$$\Phi_2 = LI \tag{3}$$

这部分磁通量的初值为 $\Phi_{20} = 0$.

因电动势为零，所以 Φ 不变是一个常数，即 $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_{10} + \Phi_{20}$.

写详细点就是 $B_0(1-bz)\pi r_0^2 + LI = B_0\pi r_0^2$.

解得

$$I = \frac{B_0 b\pi r_0^2}{L}z \tag{4}$$

接下来只要把 $z=z(t)$ 关系解出来就能得到 $I=I(t)$ 函数关系. 因为 z 方向是简谐振动，我们得先求出简谐振动的圆频率才能定量写出 $z=z(t)$.

如何获取简谐振动的圆频率 ω？我们对圆环受力分析，写出简谐振动的运动学方程即可求得圆频率 ω.

对圆环受力分析，z 方向磁场分量对圆环电流的作用力都沿着圆环径向，合力为零. 只有径向磁场分量对电流的作用力沿 z 轴正向，即

$$m\ddot{z} = -mg + \left(\frac{B_0 b\pi r_0^2}{L}\right)z\cdot 2\pi r_0\cdot aB_0 r_0 \tag{5}$$

令 $\ddot{z}=0$，可得平衡位置的 z_0 坐标为

$$z_0 = -\frac{mgL}{2\pi^2 B_0^2 abr_0^4} \tag{6}$$

我们令 $Z=z-z_0$ 建立新的 Z 轴，上述运动学方

程可写成

$$\ddot{Z}+\frac{2\pi^2 B_0^2 abr_0^4}{mL}Z=0 \tag{7}$$

可见,圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2\pi^2 B_0^2 abr_0^4}{mL}} \tag{8}$$

故圆环的运动学方程为

$$z-z_0=A\cos\omega t \tag{9}$$

代入初值条件 $t=0$,$z=0$,得 $A=-z_0$.

所以,$z=\dfrac{mgL}{2\pi^2 B_0^2 abr_0^4}(\cos\omega t-1)$. (10)

联立式(4)和式(10)得

$$I=\frac{mg}{2\pi B_0 ar_0^2}(\cos\omega t-1) \tag{11}$$

典型解答 2:把磁场用 B_r 和 B_z 两个分量磁场等效替代,其中 B_r 分量的特点是呈辐射状分布,处处与圆环垂直,且圆环的每一小段超导体圆环所在空间的 B_r 磁场大小相等;而 B_z 分量的特点是沿着竖直方向,且高度越高,磁感应强度越小.由于重力作用圆环在下落过程中,以垂直于 B_r 分量的速度切割了磁感线,获得了动生电动势 ε_1,方向为(逆着 z 轴看)顺时针方向;同时由于 B_z 分量垂直穿过圆环所在平面,B_z 分量的磁通量随着圆环的下落在不断增大,故磁通量在面积恒定的超导体圆环中不断增大,根据法拉第电磁感应定律,它将产生一个顺时针方向(逆着 z 轴看)的感生电动势 ε_2,再加上感应电流的磁通量变化对应的感生电动势 ε_3,根据基尔霍夫回路电压方程,这 3 个电动势的和为零,即

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0 \tag{12}$$

其中

$$\varepsilon_1=\dot{z}\cdot aB_0 r_0\cdot 2\pi r_0 \tag{13}$$

$$\varepsilon_2=-\frac{\mathrm{d}[B_0(1-bz)\pi r_0^2]}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

$$\varepsilon_3=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

联立式(12)、(13)、(14)、(15)得

$$I=\frac{B_0\pi r_0^2(2a+b)}{L}z \tag{16}$$

用上述典型解法 1 相似的思路,继续解下去:

$$m\ddot{z}=-mg+\frac{B_0(2a+b)b\pi r_0^2}{L}z\cdot 2\pi r_0\cdot aB_0 r_0 \tag{17}$$

令 $\ddot{z}=0$,可得平衡位置的 z_0 坐标为

$$z_0=-\frac{mgL}{2\pi^2 B_0^2 a(2a+b)r_0^4} \tag{18}$$

我们令 $Z=z-z_0$ 建立新的 Z 轴,上述运动学方程可写成

$$m\ddot{Z}+\frac{2^2 B_0^2 a(2a+b)r_0^4}{L}Z=0 \tag{19}$$

可见,圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2\pi^2 B_0^2 a(2a+b)r_0^4}{mL}} \tag{20}$$

故圆环的运动学方程为

$$z-z_0=A\cos\omega t \tag{21}$$

代入初值条件 $t=0$,$z=0$,得 $A=-z_0$.

所以,$z=\dfrac{mgL}{2\pi^2 B_0^2 a(2a+b)r_0^4}(\cos\omega t-1)$ (22)

联立式(16)和式(22)得

$$I=\frac{mg}{2\pi B_0(2a+b)r_0^2}(\cos\omega t-1) \tag{23}$$

请读者把典型解法 1 中的式(4)～(11)和典型解法 2 中的式(16)～(23)做一一比对就会发现,从式(4)和式(16)出现了分歧直接导致最后结果的差异.

哪种典型解法是正确的呢?

3 两种典型解法孰对孰错 错因在哪

显然,典型解法 1 根据法拉第电磁感应定律和基尔霍夫方程推导出的电流与空间坐标 z 的关系是正确的.那么典型解法 2 中通过分别求解动生电动势、感生电动势、自感电动势 3 项之和作为感应电动势的做法错在哪里呢?我们来一项一项排查.

3.1 典型解法 2 中对 ε_1 和 ε_3 的求解是正确的

本题中圆柱形对称的磁场不随时间发生变化,运动的超导体圆环切割磁感线所得到的动生电动势为

$$\varepsilon_1=\oint\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint\boldsymbol{v}\times(B_r\hat{r}+B_z\hat{z})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=$$

$$\oint\boldsymbol{v}\times B_r\hat{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint\boldsymbol{v}\times B_z\hat{z}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中第二项中 $\boldsymbol{v}$ 和 $B_z\hat{z}$ 方向互相平行,叉乘后为零,故电动势就是

$$\varepsilon_1=\oint\boldsymbol{v}\times B_r\hat{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\dot{z}\cdot aB_0 r_0\cdot 2\pi r_0$$

自感电动势 ε_3 的求解显然是正确的,毋庸置疑.

3.2 典型解法 2 中对 ε_2 的求解是错误的

这种解法认为,由于 B_z 分量垂直穿过恒定面积的圆环,磁通量会随着 B_z 分量的增大而增大从而产生感生电动势 ε_2.

从地面系来看，本题中圆柱形对称的磁场并不是时变的，所以，ε_2 这个感生电动势并不存在；而在地面系看来，圆环下落过程中的每一部分微元长度的运动方向都与 $B_z\hat{z}$ 分量是平行的，不存在切割磁感线一说，所以，也没有动生电动势存在.

从圆环参考系来看，圆环本身是静止的，而它所处的外部磁场是时变的. 因为径向磁场分量大小不变且与静止的圆环平面始终平行，这个磁场分量对应的磁通量始终为零，不产生感生电动势；垂直于圆环所在平面的磁场 z 分量是时变的，故会产生感生电动势 ε_2.

那么我们究竟怎么去理解这个 ε_2 的存在与否呢？《新概念物理教程电磁学》中提到[1]，由于运动是相对的，会出现同一感应电动势在某一参考系中是感生电动势，在另一参考系中是动生电动势的现象，但是，参考系的变化只能在一定程度上消除感生和动生的界限，在普遍情形下是不可能通过参考系的变换把感生电动势完全归结为动生电动势，反之亦然. 这就告诉我们，处理感生电动势和动生电动势的问题我们需要在同一参考系中进行. 典型解法 2 中，ε_1 和 ε_3 都是在地面系中观察的，而这个感生电动势只能在圆环参考系中观察到，而 ε_2 一旦转换到地面系中它就不复存在. 在处理同一个问题时，我们只能选择在相同的参考系中解决，所以，典型解法 2 中式(12) 在地面系中应该改写为

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \tag{24}$$

联立式(13)、(15)、(24) 可得

$$\dot{z} \cdot 2\pi r_0 \cdot aB_0 r_0 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

等号两边同时对时间积分可得

$$I = \frac{2\pi r_0^2 aB_0}{L}z \tag{25}$$

比较式(4) 和式(25)，我们发现求出来的结果不同. 难道我们在地面参考系中求解出来的电动势仍然是错误的吗？ 其实不然. 下面我们来证明式(25) 与式(4) 是等价的.

我们知道磁感线是封闭的曲线，通过任何闭合曲面的磁通量一定为零. 我们在圆柱形对称的磁场中选择一个长为 $\mathrm{d}z$，半径为 r 的圆柱面(包含两端的底面)，该圆柱面的中心轴线与 z 轴重合. 根据磁场的“高斯定理”可知，通过这个闭合圆柱面的磁通量为零，即

$$B_r(z,r)2\pi r\mathrm{d}z + \pi r^2 B_z(z+\mathrm{d}z,r) - \pi r^2 B_z(z,r) = 0 \tag{26}$$

当 $\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}r$ 都趋近于零时，由式(26) 可知

$$B_r(z,r) = -\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} \tag{27}$$

把本题题设的 $B_z\hat{z} = B_0(1-bz)\hat{z}$ 代入上式对 z 求导得

$$B_r(z,r) = \frac{b}{2}B_0 r \tag{28}$$

与本题题设的 $B_r = aB_0 r$ 做对比可以发现，其实本题题设的

$$\boldsymbol{B} = B\hat{r} + B_z\hat{z} = (aB_0 r)\hat{r} + B_0(1-bz)\hat{z}$$

中的两个常数 a 和 b 存在 $a = \dfrac{b}{2}$ 的制约关系，这个制约关系由磁场的性质决定，并不是彼此独立的.

再回头看式(25)，我们把 $a = \dfrac{b}{2}$ 代入其中，发现原来式(4) 和式(25) 是等价的. 这样，我们在本文 3.2 中对典型解法 2 中的错因分析完全正确，根据我们找到的错因进行纠正做出的解答也是完全正确的.

最后，我们观察典型解法 2 中得到的式(16)，把 $a = \dfrac{b}{2}$ 代入其中得

$$I = \frac{2bB_0\pi r_0^2}{L}z \tag{29}$$

与式(4) $I = \dfrac{B_0 b\pi r_0^2}{L}z$ 对比.

式(29) 的错解恰好是式(4) 正解的 2 倍. 这个错误的原因现在就很好理解了. 处理同一个问题时，我们只能选择在相同的参考系中来解决才能获得正确答案. 在典型解法 2 中学生先在地面系中观察得到感应电动势 ε_1 和 ε_3，再换到圆环系中观察得到感应电动势 ε_2，把 3 个感应电动势相加. 而根据上述分析，因为微小圆柱闭合曲面侧面上的磁通量的变化量与其上下底面上的磁通量的变化率的绝对值刚好相等，因此，在地面系中观察不到而只能在圆环系中才能观察到的 ε_2 等同于地面系中观察到的 ε_1，这两个感应电动势其实就是同一个感应电动势，典型解法 2 中在同一问题中取不同参考系去求解感应电动势，无形中把 ε_1 重复计算一次了，于是典型解法 2 中因电动势加倍而导致电流也加倍了. 这就是式(16) 的错误原因，也是典型解法 2 的错误原因.

参考文献

1　赵凯华，陈熙谋. 新概念物理教程・电磁学[M]. 北京：高等教育出版社，2006.12