



# 也证“平面平行运动刚体弹性碰撞前后 相对速度大小相等”

王孝厂

(浙江省温州中学 浙江 温州 325014)

(收稿日期:2020-10-29)

**摘要:**在解决两个球的对心弹性碰撞问题时,经常用碰撞点碰撞前后相对速度大小相等方程代替能量守恒的方程,这使得方程更加的简单易解.对于刚体的弹性碰撞,是否也可以类似的替代呢?笔者证明了做平面平行运动的自由刚体和受理想约束的刚体发生弹性碰撞过程中,发生碰撞的两点在碰撞前后沿碰撞力的方向上相对速度大小相等.

**关键词:**弹性碰撞 相对速度大小相等 刚体

贵刊2020年第7期刊登了陈铁松老师的《平面平行运动的刚体弹性碰撞问题的探讨》<sup>[1]</sup>一文,文中作者证明了两个做平面平行运动的自由刚体“发生碰撞过程中,若发生碰撞的两点在碰撞力的方向上相对速度大小相等”,则“碰撞前后系统动能不变”<sup>[1]</sup>.

本文将从弹性碰撞出发,直接证明做平面平行运动的自由刚体和受理想约束的刚体发生弹性碰撞过程中,发生碰撞的两点在碰撞前后沿碰撞力的方向上相对速度大小相等.

## 1 两个自由的刚体发生弹性碰撞

如图1所示,有两个光滑刚体甲、乙, $C_1$ 和 $C_2$ 分别为两刚体的质心,其速度分别为 $\mathbf{v}_{C10}$ 和 $\mathbf{v}_{C20}$ ,两刚体绕质心转动的角速度分别为 $\omega_{10}$ 和 $\omega_{20}$ .两刚体在某一时刻发生弹性碰撞,刚体甲上的 $A_1$ 点与刚体乙上的 $A_2$ 点接触,并且刚体甲对刚体乙的冲量为 $\mathbf{I}$ .由于没有摩擦,冲量 $\mathbf{I}$ 方向应沿过两刚体接触点的公法线(图1中 $PQ$ ).假设碰撞后刚体甲、乙质心的速度分别为 $\mathbf{v}_{C1}$ 和 $\mathbf{v}_{C2}$ ,两刚体绕质心转动的角速度分别为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ ,对过质心垂直纸面的轴的转动惯量分别

为 $J_1$ 和 $J_2$ .

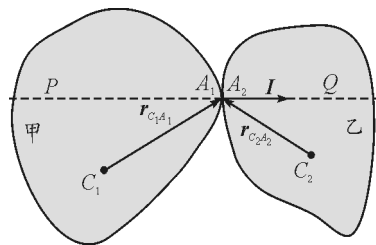


图1 自由的刚体发生弹性碰撞

对刚体甲、乙分别应用质点系动量定理<sup>[2]</sup>得

$$-\mathbf{I} = m_1 \mathbf{v}_{C1} - m_1 \mathbf{v}_{C10} \quad (1)$$

$$\mathbf{I} = m_2 \mathbf{v}_{C2} - m_2 \mathbf{v}_{C20} \quad (2)$$

在碰撞过程中刚体的质心对地有加速度,设某时刻刚体甲质心加速度为 $\mathbf{a}_{C1}$ ,在刚体甲的质心系中,刚体甲中任意质量为 $\Delta m_i$ 的质元都会受到惯性力 $\Delta \mathbf{F}_i = -\Delta m_i \mathbf{a}_{C1}$ <sup>[2]</sup>.质元受到惯性力与重力 $\mathbf{G}_i = \Delta m_i \mathbf{g}$ 相类似,重力的等效作用点为质心(重心),容易得到刚体甲各部分所受惯性力的等效作用点为刚体甲的质心,同理可得刚体乙在质心系中各部分所受惯性力的等效作用点为刚体乙的质心.所以在两刚体的各自质心系中惯性力对质心的力矩为零.在两刚体各自的质心系中,对刚体甲、乙分别应用质点

系角动量定理<sup>[2]</sup>得

$$\mathbf{r}_{C_1 A_1} \times (-\mathbf{I}) = J_1 \boldsymbol{\omega}_1 - J_1 \boldsymbol{\omega}_{10} \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{C_2 A_2} \times \mathbf{I} = J_2 \boldsymbol{\omega}_2 - J_2 \boldsymbol{\omega}_{20} \quad (4)$$

由柯尼希定理<sup>[2]</sup>及碰撞过程的机械能守恒得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{C10}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C20}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{20}^2 =$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \quad (5)$$

通过移项可化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 v_{C10}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 - \\ & \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{C20}^2 + \\ & \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_2 \omega_{20}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

利用矢量点乘的性质可化为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{v}_{C10} - \mathbf{v}_{C1}) \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \mathbf{v}_{C1}) + \\ & \frac{1}{2} J_1 (\boldsymbol{\omega}_{10} - \boldsymbol{\omega}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_1) = \\ & \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{v}_{C2} - \mathbf{v}_{C20}) \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \mathbf{v}_{C20}) + \\ & \frac{1}{2} J_2 (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_{20}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{20}) \end{aligned} \quad (7)$$

将式(1)~(4)代入式(7)可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \mathbf{v}_{C1}) + (\mathbf{r}_{C_1 A_1} \times \mathbf{I}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_1) = \\ & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \mathbf{v}_{C20}) + (\mathbf{r}_{C_2 A_2} \times \mathbf{I}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{20}) \end{aligned} \quad (8)$$

利用矢量混积的性质<sup>[2]</sup>

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

可将式(8)化为

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \mathbf{v}_{C1}) + \mathbf{I} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r}_{C_1 A_1}] = \\ & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \mathbf{v}_{C20}) + \mathbf{I} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{20}) \times \mathbf{r}_{C_2 A_2}] \end{aligned} \quad (9)$$

整理得

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{C_1 A_1}) - \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2 A_2}) = \\ & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2 A_2}) - \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1 A_1}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)除以  $I$  可得

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{C_1 A_1}) - \\ & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2 A_2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2 A_2}) - \\ & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1 A_1}) \end{aligned} \quad (11)$$

令  $A_1$  点碰前、碰后沿  $PQ$  的速度分量  $v_{10n}$  和  $v_{1n}$ , 则

$$v_{10n} = \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{C_1 A_1})$$

$$v_{1n} = \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1 A_1})$$

令  $A_2$  点碰前、碰后沿  $PQ$  的速度分量  $v_{20n}$  和  $v_{2n}$ , 则

$$v_{20n} = \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2 A_2})$$

$$v_{2n} = \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2 A_2})$$

所以式(11)即为

$$v_{10n} - v_{20n} = v_{2n} - v_{1n}$$

也就是碰撞前后沿碰撞力的方向上相对速度大小相等。

## 2 自由刚体与受约束刚体的弹性碰撞

在第1种情况中若刚体乙上的  $O$  点被光滑的槽限制在直线  $MN$  上运动, 如图2所示, 则在两刚体碰撞的过程中, 光滑槽可能会对刚体乙施加一冲量, 设为  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_1$  垂直于  $MN$ 。

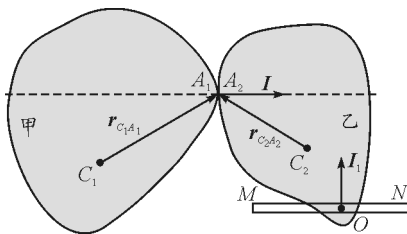


图2 自由刚体与受约束刚体发生弹性碰撞

对刚体甲、乙分别应用质点系动量定理得

$$-\mathbf{I} = m_1 \mathbf{v}_{C1} - m_1 \mathbf{v}_{C10} \quad (12)$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}_1 = m_2 \mathbf{v}_{C2} - m_2 \mathbf{v}_{C20} \quad (13)$$

惯性力在质心系中对质心的力矩为零, 所以在两刚体的质心系中, 对刚体甲、乙分别应用质点系角动量定理得

$$\mathbf{r}_{C_1 A_1} \times (-\mathbf{I}) = J_1 \boldsymbol{\omega}_1 - J_1 \boldsymbol{\omega}_{10} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_{C_2 A_2} \times \mathbf{I} + \mathbf{r}_{C_2 O} \times \mathbf{I}_1 = J_2 \boldsymbol{\omega}_2 - J_2 \boldsymbol{\omega}_{20} \quad (15)$$

(下转第89页)

则电磁场的质量根据质能方程为

$$m = \frac{E}{c^2}$$

因此,电磁场的质量和实物的质量是不同的.真空中的电磁场始终以光速传播,因此物体始终无法达到光速.由于低速时遵循牛顿力学定律,所有物体都可以在力的作用下进行加速运动.但是对于电磁场,不存在加速度.在真空中,光子只能以光速移动,否则根本不存在.当实物粒子遇到无弹性的障碍物时,它只会失去其动能和动量,并将其传递给障碍物;而电磁场碰到吸收的障碍物时,就会停止存在,并转化成为实物.

### 3.3 实物具有比场大得多的质量密度和能量密度

由于光速等于  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,所以场的质量密度极其微小,只有在核反应时才能衡量场的质量大小.场的质量虽然小,但我们却容易发现场的能量,其原因就在于能量是质量的  $c^2$  倍.当用实物和电磁场运输同样的功率时,通过电磁场进行能量传递的

特征是质量几乎等于零,速度非常大,这正是现代生活中电磁场容易被利用的原因.

## 4 结论

综上所述,场和实物作为物质的两种存在形式,相辅相成,与我们的生活息息相关.因此学习电磁学知识离不开对物理基本概念的理解,不仅需要掌握好场所具有的物质的一般属性,同时也要清楚认识到它所具有的特殊性,才能形成正确的科学意识去解决相关问题.

### 参考文献

- 1 张桂权.笛卡尔的空间观念及其现代意义[J].四川师范大学学报(社会科学版),2014(3):28~32
- 2 郭奕玲,沈慧君.物理学史[M].北京:清华大学出版社,2005.115
- 3 郭硕鸿.电动力学[M].北京:高等教育出版社,2008.14
- 4 赵凯华.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2013.423~425

(上接第81页)

由柯尼希定理和碰撞过程的机械能守恒得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m_1 v_{C10}^2 + \\ & \frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{C20}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{20}^2 = \\ & \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \\ & \frac{1}{2} m_2 v_{C2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \end{aligned} \quad (16)$$

将式(12)~(15)代入式(16),化简可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{C_1A_1}) - \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2A_2}) = \\ & \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2A_2}) - \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1A_1}) + \mathbf{I}_1 \cdot \\ & (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2O}) + \mathbf{I}_1 \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2O}) \end{aligned} \quad (17)$$

由于  $O$  点只能沿着  $MN$  运动,可得

$$\mathbf{I}_1 \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2O}) = 0 \quad (18)$$

$$\mathbf{I}_1 \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2O}) = 0 \quad (19)$$

将式(18)、(19)代入式(17)得

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{C_1A_1}) - \\ & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C20} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{C_2A_2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2A_2}) - \\ & \frac{\mathbf{I}}{I} \cdot (\mathbf{v}_{C1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1A_1}) \end{aligned}$$

也就是  $v_{10n} - v_{20n} = v_{2n} - v_{1n}$ ,即碰撞前后,沿碰撞力的方向上相对速度大小相等.

若刚体乙只能绕  $O$  点无摩擦地定轴转动,则在碰撞过程中刚体乙也会受到一个过  $O$  点的冲量  $\mathbf{I}_2$ ,则可认为光滑槽沿着与  $\mathbf{I}_2$  垂直的方向,所以  $v_{10n} - v_{20n} = v_{2n} - v_{1n}$  也显然成立.

由上证明可见,平面平行运动的刚体不管是否受到理想约束,在弹性碰撞过程中,碰撞前后沿碰撞力的方向上相对速度大小相等,利用此关系列出的方程为一次方程,可以代替能量守恒与动量、角动量相关的关系式一起求解碰撞之后刚体运动各参量.

### 参考文献

- 1 陈铁松.平面平行运动的刚体弹性碰撞问题的探讨[J].物理通报,2020(7):55~56
- 2 漆安慎,杜婵英.力学[M].北京:高等教育出版社,2012.97,86,175,154,458