一般匀强电磁场中电荷的相对论性运动

姜志锋
(鄱阳县第一中学　江西 上饶　333100)
黄亦斌
(江西师范大学物理与通信电子学院　江西 南昌　330000)

(收稿日期:2020-11-01)

摘　要:将电荷在匀强电磁场中的运动从电磁场正交推广到非正交的一般情形,且在相对论情形下进行了一般讨论.然后将一般结果用于初始时静止的电荷,得到其运动学方程,并讨论了各种特殊情况,包括两种非相对论近似及对应的相对论修正.

关键词:匀强电磁场　原时　协变形式　非相对论近似

匀强电场和匀强磁场同时存在时带电粒子的运动一直是大家感兴趣的话题.其讨论可分为两类:非相对论性的和相对论性的.对于前者,最早是文献[1]给出了一种漂亮的处理方式,后来大家从理论、轨迹、数值计算等几方面进行了详尽的讨论[2~6].在相对论情形,讨论较多的是电场与磁场正交这一有趣的特例[7,8].此时,只要 $|B|c\neq|E|$,就一定可以找到一个惯性系,使得其中只有电场或只有磁场,于是可以在新惯性系中求解问题,再利用洛伦兹变换得到原惯性系中想要的结果.这一思路具有鲜明的物理特色.

本文试对一般的匀强恒定电磁场讨论带电粒子的一般相对论性运动.当然,不能期望此时仍能找到类似的、物理特色鲜明的思路.

1　一般讨论

在自然单位制($c=1$)下,相对论粒子的动量 $\boldsymbol{p}$ 和能量 W 分别为

$$\boldsymbol{p}=\gamma m\boldsymbol{v}\qquad W=\gamma m\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\tag{1}$$

其中 m 为固有质量,也就是牛顿力学中的质量.动量和能量满足质壳条件

$$W^2-\boldsymbol{p}^2=m^2\tag{2}$$

在电磁场中,带电粒子的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\tag{3}$$

根据式(1),这是关于速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 的非线性微分方程组,即使在电磁场正交时也不好处理.所幸,我们可以将其改为另一形式.式(3)点乘 $\boldsymbol{v}$,得到

$$q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\tag{4}$$

改用固有时(或原时)τ 作为自变量

$$\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau\tag{5}$$

将式(5)代入式(3)、(4),并利用式(1),即得到一组关于四维矢量$(W,\boldsymbol{p})$的、协变形式的方程组

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=k\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau}=k(\boldsymbol{E}W+\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B})\tag{6}$$

其中 $k=\dfrac{q}{m}$ 为粒子的荷质比.由于电磁场是匀强的,故上式同时也是关于变量$(W,\boldsymbol{p})$的一阶常系数线性常微分方程组,有成熟算法可以处理.

不失一般性,可设电磁场为

$$\boldsymbol{B}=(0,0,B)\qquad \boldsymbol{E}=(0,E_y,E_z)\tag{7}$$

且不妨设 $k,B,E_y,E_z\geqslant 0$,因为其中任何一个反号都不难额外处理.于是方程组(6)写为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}W = kE_y p_y + kE_z p_z \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_x = kB p_y \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_y = kE_y W - kB p_x \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_z = kE_z W
\end{aligned}
\tag{8}
$$

兹用微分算子法解之,将其写为

$$
\begin{pmatrix} -\Delta & 0 & kE_y & kE_z \\ 0 & -\Delta & kB & 0 \\ kE_y & -kB & -\Delta & 0 \\ kE_z & 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = 0 \tag{9}
$$

其中 $\Delta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$ 为微分算子. 将式(9) 中的 Δ 视为数,由“系数矩阵”的行列式等于零,得到

$$
\Delta^4 + k^2(B^2 - E^2)\Delta^2 - k^4 B^2 E_z^2 = 0 \tag{10}
$$

其中$E^2 = E_y^2 + E_z^2$. 可以看出,式(10) 中的$(B^2 - E^2)$和 $BE_z = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ 恰为电磁场仅有的两个不变量. 式(10) 其实是说,其左边的微分算子作用到$(W,\boldsymbol{p})$ 中的任何一个都等于零,例如

$$
[\Delta^4 + k^2(B^2 - E^2)\Delta^2 - k^4 B^2 E_z^2]\, p_x = 0 \tag{11}
$$

其对应特征方程的 4 个特征根为

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = -\mathrm{i}k\alpha \qquad \lambda_2 = \mathrm{i}k\alpha \\
\lambda_3 = -k\beta \qquad \lambda_4 = k\beta
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中

$$
\alpha = \frac{\sqrt{\sqrt{(B^2 - E^2)^2 + 4B^2E_z^2} + (B^2 - E^2)}}{\sqrt{2}}
$$

$$
\beta = \frac{\sqrt{\sqrt{(B^2 - E^2)^2 + 4B^2E_z^2} - (B^2 - E^2)}}{\sqrt{2}}
$$

且它们满足$\alpha^2 - \beta^2 = B^2 - E^2$. 于是$p_x$ 的通解为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha\tau}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha\tau}$, $\mathrm{e}^{-k\beta\tau}$, $\mathrm{e}^{k\beta\tau}$ 的线性组合,或为 $\cos(k\alpha\tau)$, $\sin(k\alpha\tau)$, $\cosh(k\beta\tau)$, $\sinh(k\beta\tau)$ 的线性组合. 于是有

$$
p_x = A\cos(k\alpha\tau + \varphi) + C\cosh(k\beta\tau + \psi) \tag{13}
$$

其中A,φ,C,ψ为积分常数. 为了让式(13) 取尽所有可能,其第二项允许C为纯虚数且ψ 的虚部为$\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$(此时p_x 仍为实数),也允许 $C\to 0$ 且 $\psi\to\infty$ 的极限情形. 这样第二项就跟$C_1\mathrm{e}^{-k\beta\tau} + C_2\mathrm{e}^{k\beta\tau}$($C_1$,$C_2$ 为任意实数) 完全等价.

将式(13) 代入式(8),可以得到其他量

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{BE_y}[A(B^2 - \alpha^2)\cos(k\alpha\tau + \varphi) + C(B^2 + \beta^2)\cosh(k\beta\tau + \psi)] \\
p_y &= \frac{-A\alpha\sin(k\alpha\tau + \varphi) + C\beta\sinh(k\beta\tau + \psi)}{B} \\
p_z &= \frac{1}{BE_yE_z}[A\alpha(\beta^2 - E_z^2)\sin(k\alpha\tau + \varphi) + C\beta(\alpha^2 + E_z^2)\sinh(k\beta\tau + \psi)]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

将式(13) 和(14) 代入质壳关系式(2),得到

$$
A^2\left[\frac{(B^2 - \alpha^2)^2}{B^2E_y^2} - 1\right] + C^2\left[\frac{(B^2 + \beta^2)^2}{B^2E_y^2} - 1\right] = m^2 \tag{15}
$$

这是系数 A,C 所满足的关系. 根据式(5),把 $\gamma = \frac{W(\tau)}{m}$ 代入,积分,可得坐标时与固有时之间的关系

$$
t = \frac{1}{BE_ykm\alpha\beta}[A\beta(B^2 - \alpha^2)\sin(k\alpha\tau + \varphi) + C\alpha(B^2 + \beta^2)\sinh(k\beta\tau + \psi)] + t_1 \tag{16}
$$

其中t_1 为常数,可要求 $\tau = 0$ 时 $t = 0$ 而确定. 若已知 $t = 0$ 时的初速度(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}),可由此得到初能量W_0 和初动量(p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}). 结合式(13) 和(14),可以解出 A,φ,C,ψ 这 4 个数.

各积分常数确定后,利用 $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{W}$ 和式(13)、(14),可以得到$\boldsymbol{v}$跟原时τ 的关系. 将$\boldsymbol{v}$对坐标时t 积分,并考虑到式(16),可以得到坐标(x,y,z) 跟 τ 的关系. 或者,根据$p^\mu = \frac{m\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$,由式(13)、(14) 对 τ 积分,亦可得四维坐标$x^\mu = (t,x,y,z)$ 跟原时 τ 的关系. 其 $\mu = 0$ 分量即式(16),其他分量计算为

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{A\beta\sin(k\alpha\tau + \varphi) + C\alpha\sinh(k\beta\tau + \psi)}{km\alpha\beta} + C_1 \\
y &= \frac{A\cos(k\alpha\tau + \varphi) + C\cosh(k\beta\tau + \psi)}{kmB} + C_2 \\
z &= \frac{1}{kmBE_yE_z}[A(E_z^2 - \beta^2)\cos(k\alpha\tau + \varphi) + C(E_z^2 + \alpha^2)\cosh(k\beta\tau + \psi)] + C_3
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中C_1,C_2,C_3 为积分常数,由初始坐标决定. 于是,问题得到完全解决.

2　特例分析

我们看一个具体例子:设匀强电磁场[见式(7)]中带电粒子初始时静止于原点,求其运动学方程. 此时,把 $\tau=0$ 时 $p_{x0}=p_{y0}=p_{z0}=0$,$W_0=m$ 代入式(13)、(14),即可得积分常数为

$$\varphi=\psi=0 \qquad C=-A=\frac{mBE_y}{\alpha^2+\beta^2}$$

于是,式(13)、(14) 给出

$$\begin{aligned}
W&=\frac{m[(\alpha^2-B^2)\cos(k\alpha\tau)+(B^2+\beta^2)\cosh(k\beta\tau)]}{\alpha^2+\beta^2}\\
p_x&=\frac{mBE_y[-\cos(k\alpha\tau)+\cosh(k\beta\tau)]}{\alpha^2+\beta^2}\\
p_y&=\frac{mE_y[\alpha\sin(k\alpha\tau)+\beta\sinh(k\beta\tau)]}{\alpha^2+\beta^2}\\
p_z&=\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)E_z}\{m[\alpha(E_z^2-\beta^2)\sin(k\alpha\tau)+\\
&\quad\beta(\alpha^2+E_z^2)\sinh(k\beta\tau)]\}
\end{aligned} \tag{18}$$

而式(16)、(17) 给出

$$\begin{aligned}
t&=\frac{\beta(\alpha^2-B^2)\sin(k\alpha\tau)+\alpha(B^2+\beta^2)\sinh(k\beta\tau)}{k\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}\\
x&=\frac{BE_y[-\beta\sin(k\alpha\tau)+\alpha\sinh(k\beta\tau)]}{k\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}\\
y&=\frac{E_y[-\cos(k\alpha\tau)+\cosh(k\beta\tau)]}{k(\alpha^2+\beta^2)}\\
z&=\frac{1}{E_zk(\alpha^2+\beta^2)}[(\beta^2-E_z^2)\cos(k\alpha\tau)+\\
&\quad(E_z^2+\alpha^2)\cosh(k\beta\tau)-(\alpha^2+\beta^2)]
\end{aligned} \tag{19}$$

不难看出,式(18)、(19) 对 k,B,E_y,E_z 的一切正负可能性都成立. 此外,式(19) 可视为参数化形式的运动学方程和轨道方程,只不过现在所取的参数是原时.

3　具体讨论

作为一般解,应该在各种条件下回到相应的特殊结果. 以下着重分析粒子的运动学方程.

讨论 1:$E_z=0$,$\left|\dfrac{B}{E}\right|>1$(记$E_y=E$)

此时有 $\alpha=\sqrt{B^2-E^2}$,$\beta=0$. 在式(19) 中令$E_z=0$,或取极限$E_z\to 0$,注意 β 也是E_z 的函数:$\beta\to\dfrac{BE_z}{\alpha}$,得到

$$\begin{aligned}
t&=\frac{B^2k\alpha\tau-E^2\sin(k\alpha\tau)}{k\alpha^3}\\
x&=BE\,\frac{k\alpha\tau-\sin(k\alpha\tau)}{k\alpha^3}\\
y&=\frac{E[1-\cos(k\alpha\tau)]}{k\alpha^2}\\
z&=0
\end{aligned} \tag{20}$$

讨论 2:$E_z=0$,$\left|\dfrac{B}{E}\right|<1$

此时有 $\beta=\sqrt{E^2-B^2}$,$\alpha\approx\dfrac{BE_z}{\beta}\to 0$. 式(19) 给出

$$\begin{aligned}
t&=\frac{E^2\sinh(k\beta\tau)-B^2k\beta\tau}{k\beta^3}\\
x&=BE\,\frac{\sinh(k\beta\tau)-k\beta\tau}{k\beta^3}\\
y&=\frac{E[\cosh(k\beta\tau)-1]}{k\beta^2}\\
z&=0
\end{aligned} \tag{21}$$

讨论 3:$E_z=0$,$\left|\dfrac{B}{E}\right|=1$

此时,可在式(20) 中令 $\alpha\to 0$,或在式(21) 中令 $\beta\to 0$,都可得到

$$\begin{aligned}
t&=\tau+\frac{1}{6}E^2k^2\tau^3\\
x&=\frac{1}{6}BEk^2\tau^3\\
y&=\frac{1}{2}Ek\tau^2\\
z&=0
\end{aligned} \tag{22}$$

讨论 4:$E_y=0$

此时,电场与磁场平行,且 $\alpha=|B|$,$\beta=|E|$,式(19) 给出

$$\begin{aligned}
t&=\frac{\sinh(kE\tau)}{kE}\\
x&=y=0\\
z&=\frac{\cosh(kE\tau)-1}{kE}
\end{aligned} \tag{23}$$

结果跟磁场无关.这符合预期,因为此时速度方向与磁场平行,洛伦兹力为零.

讨论 5:非相对论情形 —— 短时间近似($k\alpha\tau$,$k\beta\tau \ll 1$)

下面考虑非相对论近似.非相对论情形下的严格解为

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{E_y}{B}t - \frac{E_y}{k B^2}\sin(kBt) \\
y &= \frac{E_y}{k B^2}[1-\cos(kBt)] \\
z &= \frac{1}{2}k E_z t^2
\end{aligned} \tag{24}
$$

在一般情形(如电场较大),随着时间推移,粒子速度会变大,相对论效应变明显,此时牛顿解只在短时间内才可靠.故考虑相对论解式(19)和牛顿解式(24)的短时间近似,二者应该接近.

将式(19)做小量展开,可得到 t,x,y,z 关于 τ 的幂级数.反解出 τ 用 t 表示的级数,代入 x,y,z 的级数中,即得到它们关于坐标时 t 的级数

$$
\begin{aligned}
\tau &\approx t - \frac{1}{6}k^2 E^2 t^3 \\
x &\approx \frac{1}{6}B E_y k^2 t^3 - \frac{1}{120}B E_y k^4 (B^2 + 9E^2) t^5 \\
y &\approx \frac{1}{2}E_y k t^2 - \frac{1}{24}E_y k^3 (B^2 + 3E^2) t^4 \\
z &\approx \frac{1}{2}E_z k t^2 - \frac{1}{8}E^2 E_z k^3 t^4
\end{aligned} \tag{25}
$$

而牛顿解式(24)在近似 $kBt \ll 1$ 下的展开式为

$$
\begin{aligned}
x &\approx \frac{1}{6}B E_y k^2 t^3 - \frac{1}{120}B^3 E_y k^4 t^5 \\
y &\approx \frac{1}{2}E_y k t^2 - \frac{1}{24}B^2 E_y k^3 t^4 \\
z &= \frac{1}{2}E_z k t^2
\end{aligned} \tag{26}
$$

可见,二者在最低两阶的行为相同,但再高时开始有不同预言.

讨论 6:非相对论情形 —— 弱电场近似

如果电场足够弱,那么粒子速度缓慢增长,使得牛顿解式(24)在长时间内是足够可靠的.在近似 $E_y,E_z \ll B$ 下,式(19)给出

$$
\begin{aligned}
t &\approx \tau + \frac{1}{6}E_z^2 k^2 \tau^3 + \frac{E_y^2[Bk\tau - \sin(k\alpha\tau)]}{B^3 k} \\
x &\approx \frac{E_y[Bk\tau - \sin(k\alpha\tau)]}{B^2 k} + \frac{1}{6B}E_y E_z^2 k^2 \tau^3 + \\
&\quad \frac{E_y^3[2Bk\tau - 3\sin(k\alpha\tau)]}{2B^4 k} - \frac{E_y E_z^2[Bk\tau - \sin(k\alpha\tau)]}{B^4 k} \\
y &\approx \frac{E_y[1-\cos(k\alpha\tau)]}{B^2 k} + \frac{E_y E_z^2 k \tau^2}{2B^2} + \\
&\quad \frac{E_y(E_y^2 - E_z^2)[1-\cos(k\alpha\tau)]}{B^4 k} \\
z &\approx \frac{1}{2}E_z k \tau^2 + \frac{1}{24}E_z^3 k^3 \tau^4 + \\
&\quad \frac{E_y^2 E_z k \tau^2}{2B^2} - \frac{E_y^2 E_z[1-\cos(k\alpha\tau)]}{B^4 k}
\end{aligned} \tag{27}
$$

其中各式的第一项(将 τ 换为 t)正好给出牛顿解式(24),而后面的项是最低阶的非零相对论修正.

进一步,当 $E_z = 0$ 时,弱电场条件应该会使得牛顿解永远足够可靠,因为速度一直都不大.而从式(27)容易看出当 $E_z = 0$ 时,y 作为 τ 的函数是有界的,符合预期.当然,此时的结果也可以从式(20)中令 $E \ll B$ 而得到.

参考文献

1 朗道,栗弗席兹.朗道理论物理教程(卷 02)场论(第 8 版)[M].北京:高等教育出版社,2012.63 ~ 64

2 闵华秀,潘武明,闵爱琳.带电粒子在交叉电磁场中运动的受力分析[J].大学物理,1982,1(12):24 ~ 26

3 汪静谊.电子在相互垂直的电场和磁场中运动轨迹的讨论[J].大学物理,1988,1(9):43 ~ 45

4 胡建新.带电粒子在正交恒定电磁场中运动状态的分析[J].大学物理,2004, 23(4):8 ~ 10

5 魏国柱,石晓玲,杜安.带电粒子在相互垂直的匀强电场和磁场中的运动轨迹[J].大学物理,2008,27(6):15 ~ 17

6 张九铸.带电粒子在正交电场和磁场中轨迹的形成及曲率半径[J].大学物理,2011,30 (5):35 ~ 38

7 王诚三.带电粒子在均匀恒定正交的电磁场中的运动[J].西华大学学报(哲学社会科学版),1990,10(1):44 ~ 45

8 戴亮,戴又善.$E^2 > H^2$ 的均匀正交电磁场中带电粒子的相对论运动[J].大学物理,2010,29(3):53 ~ 58