



均匀带电半球面轴线上场强的计算*

白春华 高国明 文丽敏

(云南大学地球科学学院 云南 昆明 650500)

(收稿日期:2020-11-17)

摘要:根据库仑定律和场强叠加原理,通过球面积分计算了均匀带电半球面轴线上的电场分布,包括球心处、球面上以及球面内外的电场强度,并给出电场随场点到球心距离变化的 $E-z$ 曲线.计算和模拟结果表明,均匀带电半球面的电场大小并不是单调变化的,电场分布在球面半径处发生跃变,并在距球心约5倍半径处电场减小到趋于零.求解思路和计算结果可以为求解其他多层同心均匀带电球壳、圆筒、均匀带电球冠模型的电场问题提供参考.

关键词:均匀带电半球面 轴线 电场强度

1 均匀带电球面和半球面电场强度的相关计算

电磁学教学中电场强度的计算是一个重要且基础的问题,有关电场强度的计算可以总结归纳出几种常用方法^[1,2]:(1)场强叠加原理;(2)高斯定理;(3)电场和电势的梯度关系.上述各种方法中,场强叠加原理是求解电场强度最基本的方法,适用于求解各种电荷分布的带电体的场强分布;高斯定理在求解电荷分布具有高度对称性(球对称、轴对称、平面对称)的几何体的电场时非常简便.除此之外,还可以利用电势和电场强度的梯度关系先求电势再求电场分布.近年来,学者们对均匀带电球面电场的求法以及能否求解球面上的电场进行了反复分析和讨论^[3~6].由于不能把高斯面取在带电表面上,所以面上的场强不能由高斯定理直接求出.虽然均匀带电几何面两侧的场强会发生跃变,但面上的电场强度也有唯一的确定值.

我们在教学中发现,当遇到所求问题为均匀带电球面、圆柱面、多层同心球面、同轴柱面等,学生利用高斯定理很容易就能求解出空间电场的分布,但对半球面电场该如何求解并不是很清楚.因为半球面上的电荷分布没有整个球面那样高度的球对称性,所以我们不能利用高斯定理求解.一般而言,适

用球面电场的计算方法大多适用于计算半球面的电场.张晓燕等根据叠加原理求解了均匀带电半球面底面上的电势分布和电场强度^[7].何海卫等分析了均匀带电半球壳轴线上的电场及其增减性^[8].林建福先利用积分法求出均匀带电半球面轴线上的电势表达式,然后利用电场强度与电势的关系导出均匀带电半球面轴线上的电场强度^[9].王世芳等利用圆环带法、电势梯度法等多种方法求解均匀半球面球心处的电场强度^[10].

上述研究利用多种解法给出了均匀带电半球面的电场强度.作为一种补充,下面我们直接利用库仑定律和场强叠加原理,通过球面积分的方法计算均匀带电半球面在球心、球面上以及球面内外的电场分布,并给出电场分布的 $E-z$ 曲线.

2 用场强叠加原理计算均匀带电半球面轴线上的电场强度

【例题】设均匀带电半球面电荷面密度为 σ ,半径为 R ,求半球面轴线上电场强度的分布.

2.1 均匀带电半球面在球心处的电场强度

取如图1所示的 xyz 坐标系,半球面位于 z 轴正半轴.场点 P 点为半球面轴线上一点,当 P 点取在球心 O 处时,在半球面上任取一面积元 dS .

* 云南大学本科教材建设项目资助,项目编号:2018JC43

作者简介:白春华(1981-),女,博士,讲师,主要从事大学物理电磁学课程教学和地磁学研究.

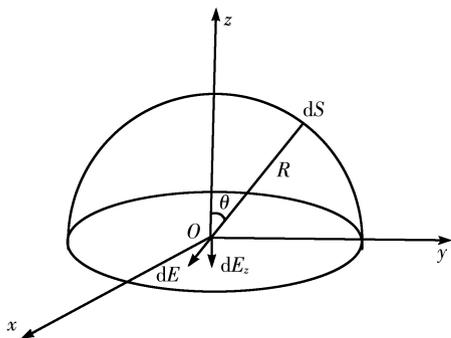


图1 半球面球心处的电场

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

面积元 dS 所带电荷量 $dq = \sigma dS$, 在球心 O 处所产生的场强为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} = \frac{\sigma \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0}$$

由对称性分析可知, dE 垂直于 z 轴方向的分量相互抵消, 沿 z 轴方向的分量为 dE_z .

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

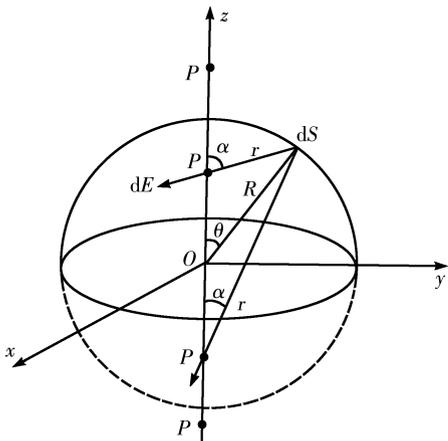
$$\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \quad (1)$$

球心处电场强度的方向沿 z 轴负方向.

2.2 均匀带电半球面轴线上一点 $P(0, 0, z)$ 的电场强度

图2为场点 P 位于 z 轴上不同位置的几种情况.

(1) 若 $0 < z < R$, 场点 P 位于半球面内

图2 均匀带电半球面 P 点处的电场

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{[(R \cos \theta - z)^2 + (R \sin \theta)^2]}$$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\sigma R^2 \sin \theta (R \cos \theta - z) d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

采用换元法, 令

$$t^2 = R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2 \quad (3)$$

当 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \in [R - z, \sqrt{R^2 + z^2}]$

由式(3)可得

$$R \cos \theta = \frac{R^2 + z^2 - t^2}{2z}$$

对式(3)两边分别求导得

$$t dt = Rz \sin \theta d\theta$$

代入式(2), 得

$$dE_z = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 - z^2 - t^2) dt d\varphi}{2z^2 t^2}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0 z^2} \int_{R-z}^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{(R^2 - z^2 - t^2) dt}{t^2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{\sigma R}{4\epsilon_0 z^2} \left(\int_{R-z}^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{R^2 - z^2}{t^2} dt - \int_{R-z}^{\sqrt{R^2+z^2}} dt \right) =$$

$$\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z^2} \left(R - \sqrt{R^2 + z^2} \right) + \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} =$$

$$\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (4)$$

该电场强度的方向沿 z 轴的负方向.

(2) 若 $z > R$, 场点 P 位于半球面外

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{[(z - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2]}$$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\sigma R^2 \sin \theta (z - R \cos \theta) d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $t^2 = R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2$, 当 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \in [z - R, \sqrt{R^2 + z^2}]$ 时

$$E_z = \int dE_z = -\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0 z^2} \int_{z-R}^{\sqrt{R^2+z^2}} \frac{(R^2 - z^2 - t^2) dt}{t^2} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z^2} \left(R + \sqrt{R^2 + z^2} \right) - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} =$$

$$\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (5)$$

该电场强度的方向指向 z 轴的正方向.

(3) 当 $z = R$, 即 P 点在半球面上时

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{[(R - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2]}$$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\sigma R^2 \sin \theta (R - R \cos \theta) d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 [2R^2 (1 - \cos \theta)]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\sigma \sin \theta d\theta d\varphi}{8\sqrt{2} \pi \epsilon_0 (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\epsilon_0} \quad (6)$$

场强方向沿 z 轴正方向.

(4) 若 $0 > z > -R$, 场点 P 位于球内 z 轴负半轴, 则

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{[(R\cos\theta + |z|)^2 + (R\sin\theta)^2]} \quad (7)$$

$$dE_z = dE \cos\alpha = \frac{\sigma R^2 \sin\theta (R\cos\theta + |z|) d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + 2R|z|\cos\theta + |z|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $t^2 = R^2 + 2R|z|\cos\theta + |z|^2$, 当 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, t

$\in [|\zeta| + R, \sqrt{R^2 + |\zeta|^2}]$ 时

$$E_z = \int dE_z = -\frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0 |\zeta|^2} \int_{|\zeta|+R}^{\sqrt{R^2+|\zeta|^2}} \frac{(|\zeta|^2 + R^2 + t^2) dt}{2t^2} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 |\zeta|^2} (R - \sqrt{R^2 + |\zeta|^2}) + \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + |\zeta|^2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 |\zeta|^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + |\zeta|^2}}\right) \quad (8)$$

电场强度的方向指向 z 轴的负方向.

(5) 若 $z < -R$, 被积函数与式(7)形式相同, 在 $z = -R$ 上没有电荷, 场强在这点连续, 场强表达式与式(8)相同, 只是 z 的取值范围不同.

$$E_z = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 |\zeta|^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + |\zeta|^2}}\right) \quad (9)$$

该电场强度的方向沿 z 轴的负方向.

(6) 当 $z = -R$, P 点在 z 轴负半轴与球面交点上

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{[(R\cos\theta + R)^2 + (R\sin\theta)^2]} \\ dE_z = dE \cos\alpha = \frac{\sigma R^2 \sin\theta (R\cos\theta + R) d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 [2R^2(1 + \cos\theta)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma \sin\theta d\theta d\phi}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 (1 + \cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$\frac{\sigma}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) \quad (10)$$

场强方向沿 z 轴负方向.

综上, 均匀带电半球面轴线上的电场强度分布为

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) & (z > R) \\ \text{方向沿 } z \text{ 轴正方向} \\ \frac{\sqrt{2}\sigma}{4\epsilon_0} & (z = R) \text{ 方向沿 } z \text{ 轴正方向} \\ \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) & (0 < z < R) \\ \text{方向沿 } z \text{ 轴负方向} \\ \frac{\sigma}{4\epsilon_0} & (z = 0) \text{ 方向沿 } z \text{ 轴负方向} \\ \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 |z|^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + |z|^2}}\right) & (0 > z > -R) \\ \text{方向沿 } z \text{ 轴负方向} \\ \frac{\sigma}{4\epsilon_0} (2 - \sqrt{2}) & (z = -R) \text{ 方向沿 } z \text{ 轴负方向} \\ \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 |z|^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + |z|^2}}\right) & (z < -R) \\ \text{方向沿 } z \text{ 轴负方向} \end{cases} \quad (11)$$

3 分析与结论

图3是用Matlab软件模拟的均匀带电半球面轴线上的电场强度 E 随 z 变化的曲线.

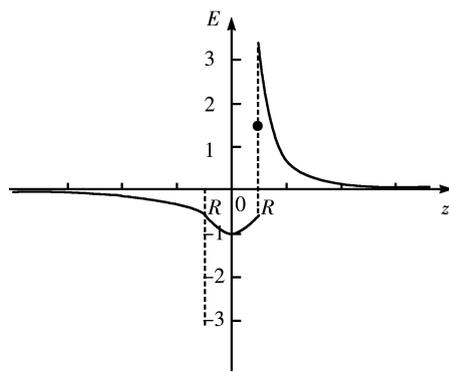


图3 均匀带电半球面轴线上的 $E-z$ 曲线

横坐标用 z 表示, 纵坐标可以用 E 表示, 球面以 R 和 $-R$ 表示. 假设电荷面密度 σ 为真空介电常数的4倍, 令球面半径 $R=1$, 则球心处电场强度相对值大小为 $\frac{\sigma}{4\epsilon_0}=1$; 其他特殊点比如球面上 z 趋近于 R 时, 其电场强度极限值也可以用相对数值表示. 由图示及理论分析可得以下结论: (1) 均匀带电半球面的电场强度在 $-R < z < R$ 范围内大小关于半球面球心对称分布, 从球心处向半球面方向电场强度减小. (2) 当 $z = +R$ 时, 在半球面半径处电场强度不

连续,图中用虚线表示电场强度在半球面上发生跃变.从球面内趋于 R 时,由式(4)得 $E_{R-}=(2-\sqrt{2})\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$.从球面外趋于 R 时,由式(5)得 $E_{R+}=(2+\sqrt{2})\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$.从直接积分计算结果式(6)得 $E_R=\sqrt{2}\frac{\sigma}{4\epsilon_0}$.当场点离半球面的距离大于半球面半径时,电场强度的变化趋势也在减小,并在大约 $5R$ 处电场强度趋于零.(3)经计算结果显示在 $z<0$ 范围内,场强连续,无穷远处为零.在 $z=-R$ 处,由式(8),式(9)和(10)所得场强相同.说明并验证了在没有电荷的点上场强不会发生跃变,而在有电荷的球面上,场强发生跃变.(4)在球面内不包括球面的区域,场强大小关于球心对称,可从静电平衡时,均匀带电球面内场强为零得以验证.设想把半球面改为均匀带电整球面即可得出结论.经积分计算在半球面 $z=R$ 处与 $z=-R$ 空间点上场强大小不同是自然的,因为 $z=-R$ 点离电荷普遍较远,场强小于 $z=R$ 处的场强.

4 总结

对于均匀带电的半球面来说,电荷分布不像整个球面电荷那样高度对称分布,不能用高斯定理求解.其他求解的方法也有多种,最基本的方法还是利用场强叠加原理,再通过面积分求出带电半球面轴线上的场强大小.类似的方法包括分割圆环带法、电

势梯度法等.虽然这些解法稍有不同,最终都可归为场强叠加方法的运用.当然,直接用场强叠加原理求解计算量相对要大些,但这种方法适用性最广.同样的解题思路也适用于求解均匀带电球冠电场强度等相关问题.

参考文献

- 1 马文蔚,周雨青.物理学(第6版)上册[M].北京:高等教育出版社,2014.176~179
- 2 赵凯华,陈熙谋.电磁学(第3版)[M].北京:高等教育出版社,2011.39~40
- 3 蔡莉莉,张晓燕.关于均匀带电球面上电场强度的求解[J].物理与工程,2015,25(1):65~67
- 4 何志巍,李纯,崔文宏,等.均匀带电球壳球面电场强度计算方法的讨论[J].物理通报,2016,35(4):7~10
- 5 刘敏敏,俎凤霞,吴涛.带电球面和带电球体电场强度和电势分布求解探讨[J].物理通报,2016,35(6):8~13
- 6 刘倩,翟晓霞,艾丽娜.电场强度在带电表面突变问题的深入探讨[J].物理通报,2016,35(8):16~18
- 7 张晓燕,冯翠菊.均匀带电半球面底面上的电场与电势[J].河南师范大学学报(自然科学版),2010,38(3):183~185
- 8 何海卫,欧阳奕成.对“均匀带电半球壳电场”问题的深度分析[J].物理教学,2018,40(4):66~67
- 9 林建福.均匀带电半球面轴线上的电势和电场强度[J].物理通报,2019,38(11):13~14
- 10 王世芳,吴涛,郑雅琦.均匀带电半球面球心处场强的多种求解方法[J].湖北第二师范学院学报,2019,36(8):14~16

Calculation of Field Strength on the Axis of Hemispherical Surface Uniformly Charged

Bai Chunhua Gao Guoming Wen Limin

(School of Earth Sciences, Yunnan University, Kunming, Yunnan 650500)

Abstract: According to Coulomb's law and field strength superposition principle, the electric field distribution on the axis of a uniformly charged hemisphere is calculated by spherical integration, including the electric field intensity at the center of the sphere, on the sphere and inside and outside the sphere, and the E - z curve of the electric field varying with the distance from the field point to the center of the sphere is given. The calculation and simulation results show that the electric field of the uniformly charged hemisphere does not change monotonously. The electric field distribution jumps at the radius of the sphere, and decreases to zero at a radius about 5 times from the center of the sphere. The solution ideas and calculation results in this paper can provide reference for solving the electric field problems of other multilayer concentric uniformly charged spherical shells, cylinders and uniformly charged spherical crowns.

Key words: uniformly charged hemisphere; axis; electric field intensity