电磁感应双杆问题加速度的一般性讨论

吴晓松

（重庆涪陵第五中学校　重庆　408000）

（收稿日期：2020－12－08）

摘　要：将电磁感应中的双杆问题情境扩展到一般情况（导轨粗糙，两杆长不等，磁感强度分布不同）后对整个回路的电流以及两杆的加速度做了理论分析，发现在恒定外力作用下两杆最终的加速度之比有一个非常简洁而美妙的结果.

关键词：电磁感应　双杆模型　加速度

1　问题的提出

双杆问题作为电磁感应中一个常见的物理模型[1]，涉及到电磁感应、安培力、牛顿运动定律和动量定理、动量守恒定律及能量守恒定律等，一直是教师在教学过程中不能回避的问题. 在各种教学参考资料中经常能见到有关这种模型问题的讨论，尤其是双杆最终加速度的问题对于学生来说受力分析仍是一大难点. 平时我们遇到的练习题中常常是导轨光滑，宽度一定，磁感强度处处分布均匀，且不受到外力的情况. 比如下面这个题.

【例 1】如图 1 所示，两根足够长的固定的平行金属导轨位于同一水平面内，两导轨间的距离为 L. 导轨上面横放着两根导体棒 ab 和 cd，构成矩形回路，如图所示.

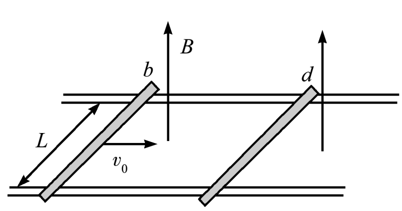


图 1　例 1 题图

两根导体棒的质量皆为 m，电阻皆为 R，回路中其余部分的电阻可不计. 在整个导轨平面内都有竖直向上的匀强磁场，磁感应强度为 B. 设两导体棒均可沿导轨无摩擦地滑行. 开始时，棒 cd 静止，棒 ab 有指向棒 cd 的初速度 v_0. 若两导体棒在运动中始终不接触，求当 ab 棒的速度变为初速度的 $\frac{3}{4}$ 时，cd 棒的加速度是多少？

原题解析：ab 棒向 cd 棒运动时，两棒和导轨构成的回路面积变小，磁通量发生变化，于是产生感应电流. ab 棒受到与运动方向相反的安培力作用做减速运动，cd 棒则在安培力作用下做加速运动. 在 ab 棒的速度大于 cd 棒的速度时，回路总有感应电流，ab 棒继续减速，cd 棒继续加速. 两棒速度达到相同后，回路面积保持不变，磁通量不变化，不产生感应电流，最终两棒以相同的速度 v 做匀速运动. 两棒加速度都为零，但是在稳定状态之前，两棒是有加速度的.

设 ab 棒的速度变为初速度的 $\frac{3}{4}$ 时，cd 棒的速度为 v_1，则由动量守恒可知

$$mv_0 = m\frac{3}{4}v_0 + mv_1 \tag{1}$$

此时回路中的感应电动势和感应电流分别为

$$E = \left(\frac{3}{4}v_0 - v_1\right)BL \tag{2}$$

$$I = \frac{E}{2R} \tag{3}$$

此时 cd 棒所受的安培力

$$F = IBL \tag{4}$$

所以 cd 棒的加速度为

$$a = \frac{F}{m} \tag{5}$$

由以上各式，可得

$$a = \frac{B^2L^2v_0}{4mR} \tag{6}$$

作者简介：吴晓松（1984－　），男，硕士，中教一级，研究方向主要为数理问题的探讨、教材与教法、竞赛与辅导、物理学史等.

做完该题后,班上一学生向老师问道,如果两棒长度不等,导轨不光滑,情况又如何呢?确实解完该题后都留给教师和学生一种意犹未尽的感觉,因此笔者在教学之余将这一模型一般化后(两杆不等长,导轨粗糙,磁场分布不同且受到外力)进行了再讨论.

2　模型的建立及求解

【例 2】如图 2 所示[2],有一足够长的水平放置的平行金属导轨间距为 l_1,其间有匀强磁场,磁感应强度为 B_1;与之相连的有间距为 l_2 的足够长的水平放置的平行金属导轨,导轨间有匀强磁场,磁感应强度为 B_2.将长为 l_1,质量为 m_1,电阻为 R_1 的金属棒 b 放置在离连接处足够远的位置,金属棒 b 与导轨的摩擦因数为 μ_1;将长为 l_2,质量为 m_2,电阻为 R_2 的金属棒 a 放置在离连接处足够远的另一位置,金属棒 a 与导轨的摩擦因数为 μ_2.导轨与金属棒 a,b 构成闭合回路,其中导轨的电阻可忽略不计.当恒力 F 垂直作用在金属棒 b 上,水平拉动金属棒.求两金属棒最终的加速度之比.

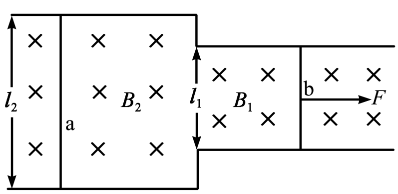


图 2　例 2 题图

解:研究 b 棒

$$F-\mu_1 m_1 g-B_1 I l_1=m_1\ddot{x}_1 \tag{7}$$

研究 a 棒

$$B_2 I l_2-\mu_2 m_2 g=m_2\ddot{x}_2 \tag{8}$$

研究闭合回路

$$I=\frac{B_1 l_1\dot{x}_1-B_2 l_2\dot{x}_2}{R_1+R_2} \tag{9}$$

由式(7)、(8)、(9)可得

$$B_1 l_1\ddot{x}_1-B_2 l_2\ddot{x}_2=\frac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g-\frac{\dfrac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\dfrac{B_2^2 l_2^2}{m_2}}{R_1+R_2}(B_1 l_1\dot{x}_1-B_2 l_2\dot{x}_2) \tag{10}$$

令

$$y=B_1 l_1\dot{x}_1-B_2 l_2\dot{x}_2$$

$$A=\frac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g$$

$$k=\frac{\dfrac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\dfrac{B_2^2 l_2^2}{m_2}}{R_1+R_2}$$

则

$$\dot{y}=B_1 l_1\ddot{x}_1-B_2 l_2\ddot{x}_2$$

所以式(10)简化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=A-ky$$

解得

$$y=\frac{A}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \tag{11}$$

经过足够长的时间后,即 $t\to\infty$ 时,$y=\dfrac{A}{k}$,得

$$I=\frac{y}{R_1+R_2}=\frac{\dfrac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g}{\dfrac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\dfrac{B_2^2 l_2^2}{m_2}} \tag{12}$$

由式(12)可以看出 I 与 R_1,R_2 无关,即经过足够长时间后电流为一定值.下面计算经过足够长时间后两金属棒各自的加速度及其比值,有

$$a_1=\frac{F-\mu_1 m_1 g-B_1 I l_1}{m_1}=\frac{F}{m_1}-\mu_1 g-\frac{B_1 l_1}{m_1}\cdot\frac{\dfrac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g}{\dfrac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\dfrac{B_2^2 l_2^2}{m_2}} \tag{13}$$

$$a_2=\frac{B_2 I l_2-\mu_2 m_2 g}{m_2}=\frac{B_2 l_2}{m_2}\cdot\frac{\dfrac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g}{\dfrac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\dfrac{B_2^2 l_2^2}{m_2}}-\mu_2 g \tag{14}$$

通分后

$$\frac{a_1}{a_2}=\left[\left(\frac{F}{m_1}-\mu_1 g\right)\left(\frac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\frac{B_2^2 l_2^2}{m_2}\right)-\frac{B_1 l_1}{m_1}\left(\frac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g\right)\right]\cdot\left[\frac{B_2 l_2}{m_2}\left(\frac{FB_1 l_1}{m_1}-\mu_1 B_1 l_1 g+\mu_2 B_2 l_2 g\right)-\mu_2 g\left(\frac{B_1^2 l_1^2}{m_1}+\frac{B_1^2 l_2^2}{m_2}\right)\right]^{-1}$$

即

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\dfrac{FB_2^2 l_2^2}{m_1 m_2}-\dfrac{\mu_1 m_1 g B_2^2 l_2^2}{m_1 m_2}-\dfrac{\mu_1 m_2 g B_1 l_1 B_2 l_2}{m_1 m_2}}{\dfrac{FB_1 l_1 B_2 l_2}{m_1 m_2}-\dfrac{\mu_2 m_2 g B_1^2 l_1^2}{m_1 m_2}-\dfrac{\mu_1 m_1 g B_1 l_1 B_2 l_2}{m_1 m_2}}=\frac{B_2 l_2}{B_1 l_1} \tag{15}$$

可见两金属棒的加速度各自趋于一个稳定值,且

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{B_2 l_2}{B_1 l_1}$$

3　对加速度比值的再分析

通过上面的求解结果可知,在恒定拉力作用下两金属棒最终加速度的比值与摩擦因数和电阻都没有关系,只与各自的磁感强度和宽度有关,无疑这是

一个非常简洁而美妙的结果.实际上这个结果的确具有合理性,对两金属棒来说水平方向受到不为零的合力时,系统必然具有加速度而且最终达到稳定状态时(比如匀加速)电流 I 必须恒定或者说电流的变化率为零.因为

$$I=\frac{B_1 l_1 v_1-B_2 l_2 v_2}{R_1+R_2}$$

所以

$$0=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{B_1 l_1 a_1-B_2 l_2 a_2}{R_1+R_2}$$

或者

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{B_2 l_2}{B_1 l_1}$$

特别地,若 $B_1=B_2$,则

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{l_2}{l_1}$$

若 $l_1=l_2$,则

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{B_2}{B_1}$$

中学物理资料上常常是其中的一根导体棒受恒定的外力且

$$l_1=l_2 \quad B_1=B_2$$

这就得到我们所熟悉的结论

$$\frac{a_1}{a_2}=1$$

如果两杆都不受到外力,最终稳定后两杆的加速度均为零,这就是原题的情景.当然如果其中一根杆受到恒定的外力,最终稳定后两杆的加速度之比就是一个简洁的结果

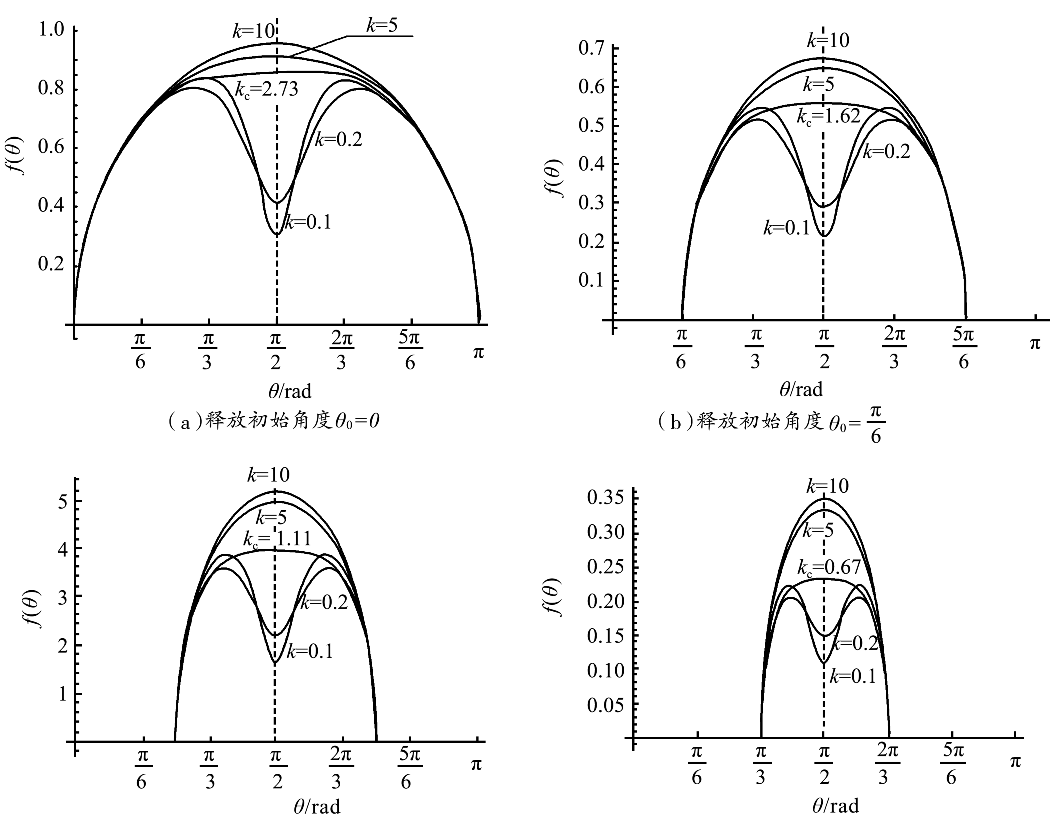
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{B_2 l_2}{B_1 l_1}$$

参 考 文 献

1　郑行军.电磁感应现象中的双杆模型归类与剖析[J].物理教学探讨,2016(1):75~77

2　金文力,胡嘉玥,杨一博.双杆架导轨问题的再讨论[J].中学物理,2012(9):43~44

(上接第 73 页)



(a)释放初始角度 $\theta_0=0$　(b)释放初始角度 $\theta_0=\frac{\pi}{6}$

(c)释放初始角度 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$　(d)释放初始角度 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$

图 4　不同释放初始角下,$f(\theta)$随角度变化关系

参 考 文 献

1　陈向正,李力,张贵华."球槽问题"模型的数理分析和一个错误的澄清[J].物理教师,2018(5):57~58