



光束通过三棱镜的偏折情况再探讨*

秦琴琴 胡志娟

(上海师范大学数理学院 上海 200234)

(收稿日期:2019-07-11)

摘要:针对本科教学中学生关于三棱镜对光束偏折情况提出的疑惑,对光束通过三棱镜的多种偏折情况进行了详细分析,讨论了入射角、折射率、棱镜顶角对出射光线偏折方向的影响,给出了三棱镜的顶角和折射率的取值范围以及入射角的取值范围对光线是否能从出射边界射出,以及出射光线的偏折方向的影响,进一步讨论了光束的偏向角与三棱镜各参数之间的关系,给出了确定最小偏向角的简单方法.

关键词:三棱镜 折射率 入射角 顶角 偏向角

三棱镜是一种基本的光束转向元件和色散元件,在光学基本实验中有诸多应用.教材中给出了棱镜最小偏向角 θ_0 的计算^[1],并提出可利用公式

$$n = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1)$$

计算棱镜材料的折射率.

在教学中有学生提出问题:如果已知三棱镜顶角 $A = 60^\circ$,对于某些折射率较大的物质如金刚石,其折射率约为2.4,利用式(1)去反推最小偏向角时,则会出现 $\sin \frac{\theta_0 + A}{2}$ 大于1的错误推论.其原因是当光束入射到某些参数的三棱镜上,由于全反射,可能在这些棱镜的出射面上并没有光线射出.在解答学生提问的过程中,我们发现不少学者对三棱镜的折光情况进行了研究^[2-7],顾菊观等人对三棱镜的最小入射角进行了研究,指出在有出射光线的情况下,入射角存在一个最小值,但并没有详细讨论有出射光线时入射角与棱镜其他参数的定量关系;李轩、张雪研究了在有出射光线情况下三棱镜的折射率、顶角对入射角和偏向角变化关系的曲线,但未给出棱镜参数的取值范围对光线偏折方向的影响.

本文详细讨论了光束通过三棱镜的多种偏折情况,给出了三棱镜的顶角和折射率的取值范围对光线是否能从出射边界射出,以及出射光线的偏折情况的影响,并进一步分析了光线的偏向角与折射率、顶角的关系,给出了确定最小偏向角的方法.

1 三棱镜对光的偏折情况

如图1所示为一个顶角为 A ,折射率为 n 的三棱镜侧面图.

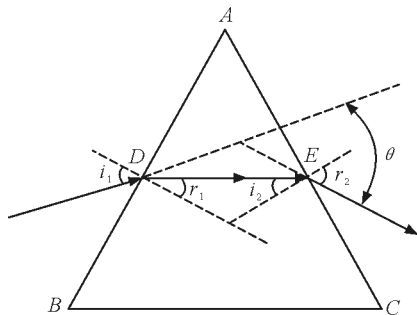


图1 三棱镜侧面图

光线从 AB 边的 D 点射入三棱镜并发生折射,到达 AC 面上的 E 点,再经过一次折射后从 E 点射出,两界面的入射角和折射角分别为 i_1, r_1 和 i_2, r_2 , θ 为 AC 面上的出射光线和 AB 边的入射光线之间的夹角,即偏向角.

* 上海市本科重点课程(光学)建设资助项目,项目编号:JF212-A-0131-18-004030

作者简介:秦琴琴(1996-),女,在读硕士研究生,研究方向为课程与教学论(物理)专业.

通讯作者:胡志娟(1978-),女,副教授,主要从事光学教学及衍射光学、微结构光学方面的科研工作.

图1中,由折射定律和几何关系有

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin r_2}{\sin i_2} \quad (2)$$

$$A = r_1 + i_2 \quad (3)$$

由折射定律可知,当入射角 i_1 减小时, r_1 会随之减小,光线 DE 会向底面 BC 偏移, i_2 会增大.若三棱镜的折射率和顶角满足一定条件,当入射角 i_1 减小到某个值时,三棱镜中的折射光线 DE 在 AC 面上发生全发射,如果继续减小入射角,则三棱镜中的折射光线均会在 AC 面上发生全发射,可见要在 AC 面上得到出射光线,入射角存在一个最小值.

在教学中有的学生会认为,光束经三棱镜两次折射后的传播方向一定是偏向底面 BC 的,实际上还可能出现图2所示的情况.当入射角 i_1 逐渐增大时,光线 DE 在 AC 面的入射点 E 会向顶角 A 移动,这时在 AC 面的入射角 i_2 将减小.对于材料的折射率不是很大,顶角也不是很大的三棱镜,随着入射角 i_1 的增大,会出现 $i_2=0$ 的情况,继而,光线 DE 会出现在 AC 面法线的下方,那么出射光线就会向 AC 面法线的上方偏折.此时,经三棱镜出射的光线的传播方向并非向三棱镜的底座偏移,而是偏向顶角射出,但出射光线相对于原入射光线仍是向底面 BC 偏折的.

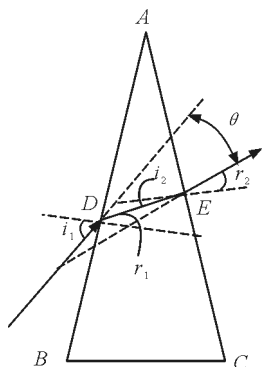


图2 出射光线偏向法线上方

2 入射角 i_1 、折射率 n 以及顶角 A 对出射光线的影响

设折射光线 DE 在 AC 面上恰好发生全反射时,对应的光线入射角为最小入射角 $i_{1\min}$,此时, AC 面上发生全反射的临界角满足

$$i_2 = \arcsin \frac{1}{n}$$

结合式(2)、(3)可得最小入射角 $i_{1\min}$ 、折射率 n 及顶角 A 的关系为

$$i_{1\min} = \arcsin(\sin A \sqrt{n^2 - 1} - \cos A) \quad (4)$$

从式(4)中可以看出, AB 边上的入射光线的最小入射角 $i_{1\min}$ 与棱镜折射率 n 、顶角 A 均有关系.在折射率 n 不变的情况下,顶角 A 越大, $i_{1\min}$ 也越大.当 A 增大到某一特定的值, $i_{1\min}$ 可能增大到 90° ,这种情况下,从 AB 边上以任意角度入射的光线,都会在 AC 面上发生全发射,设顶角 A 的这一特定值为 A_{\max} ,那么,棱镜的顶角 A 超过 A_{\max} 后将不会从 AC 面上得到出射光线.利用

$$\begin{aligned} i_{1\min} &= 90^\circ \\ r_1 &= \arcsin \frac{1}{n} \\ i_2 &= \arcsin \frac{1}{n} \end{aligned}$$

并由式(2)、(3)可求得

$$A_{\max} = 2\arcsin \frac{1}{n}$$

因此,给定三棱镜的折射率 $n=2.4$ 时,则对应的 $A_{\max}=49.2^\circ$,所以当顶角 $A=60^\circ$,已经超过了有光线出射时要求的最大顶角值,因而不会有光线从 AC 面射出.

此外,若顶角 A 越小, $i_{1\min}$ 也会越小,当 A 减小到某值 A_{\min} , $i_{1\min}$ 会减小到零,此时恰好所有入射光线都可以从 AC 面射出.利用

$$i_{1\min} = 0 \quad r_1 = 0 \quad i_2 = \arcsin \frac{1}{n}$$

由几何关系可得

$$A_{\min} = \arcsin \frac{1}{n}$$

而对于顶角 A 小于极小值 A_{\min} 的三棱镜,光线以任意角度入射,都会从 AC 面射出.但是在不同条件下,光线经三棱镜后,出射光线的传播方向可能偏向底面 BC ,也可能偏向顶角 A ,偏转方向的临界条件可以通过三棱镜中 DE 光线恰好垂直入射到 AC 面上所对应的入射角来判断,此时入射角 i_1 满足

$$\sin i_1 = n \sin A$$

而当入射角 $i_1 > \arcsin(n \sin A)$ 时,折射光线 DE 将从 E 点入射到 AC 面,且出现在 AC 面的法线(过

E 点)的上方(如图2所示),那么,出射光线将向顶角 A 偏折。

图3给出了不同折射率的三棱镜的最小入射角随着顶角的变化关系,从图中可以看出最小入射角 $i_{1\min}$ 随着三棱镜顶角 A 的增大而增大,图中直线 PM 表示三棱镜顶角 A 增大到极大值 A_{\max} 后,对应的最小入射角都为 90° ,当三棱镜的顶角取 PM 直线上的值时,无论光线的入射角取何值,折射光在棱镜内的 AC 面均会发生全反射,无出射光线产生。每条曲线与横坐标的交点对应着顶角 A 的极小值 A_{\min} 。

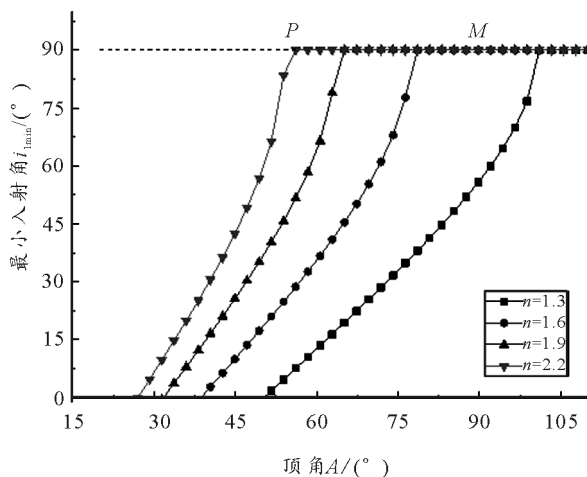


图3 不同折射率 n 下 $i_{1\min}-A$ 关系

此外,顶角 A 的这两个临界值,也可以用代数求解的方法得到,设 A_{\min}, A_{\max} 分别对应最小入射角等于零和 90° 的情况,分别将 $i_{1\min}=0$ 和 $i_{1\min}=90^\circ$ 代入式(4),有

$$0 = \arcsin(\sin A_{\min} \sqrt{n^2 - 1} - \cos A_{\min}) \quad (5)$$

$$90^\circ = \arcsin(\sin A_{\max} \sqrt{n^2 - 1} - \cos A_{\max}) \quad (6)$$

解式(5)、(6)也可得

$$A_{\min} = \arcsin \frac{1}{n}$$

$$A_{\max} = 2\arcsin \frac{1}{n}$$

这与上面的分析是一致的。综上,在三棱镜的折射率 n 不变时,顶角 A 对出射光线的影响有以下规律。

(1) 当顶角 $A < A_{\min}$ 时,以任意角度入射的光线都会从 AC 面射出,并且当入射角满足

$$i_1 > \arcsin(n \sin A)$$

出射光线的传播方向将偏向顶角 A (往 AC 面过 E 点的法线上方偏折),当 $i_1 < \arcsin(n \sin A)$ 时出射光

线将偏向底面 BC (往 AC 面过 E 点的法线下方偏折);

(2) 当 $A_{\min} < A < A_{\max}$ 时,只有在入射角大于 $i_{1\min}$ 的条件下, AC 面上才会有光线射出,并且所有光线均向底面 BC (即 AC 面法线下方)偏折,当顶角 A 增大时,对应的最小入射角 $i_{1\min}$ 也会增大;

(3) 当 $A > A_{\max}$ 时,从 AB 面以任意角度入射的光线,进入三棱镜后,均会在棱镜内 AC 面上发生全发射,因此,不会有光线从 AC 面射出。

同理,当三棱镜的顶角 A 不变时,折射率 n 也会对最小入射角产生影响。由式(4)知,当折射率 n 增大时, $i_{1\min}$ 也随之增大,当 n 增大到某个值 n' 时, $i_{1\min}$ 增大到 90° ,这时由折射定律和几何关系可求得折射率的极大值

$$n' = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}$$

而折射率 n 值越小,对应的 $i_{1\min}$ 也越小,当 n 减小到某值 n'' 时, $i_{1\min}$ 可能减小到零,此时对应折射率的极小值

$$n'' = \frac{1}{\sin A}$$

图4是具有不同顶角 A 的三棱镜的最小入射角 $i_{1\min}$ 随折射率 n 的变化关系曲线。

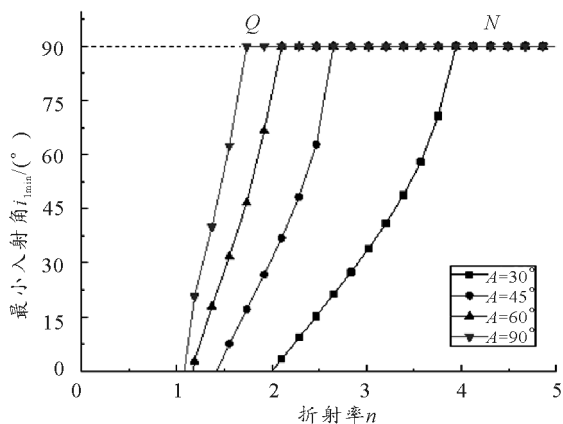


图4 不同顶角 A 下 $i_{1\min}-n$ 关系

从图4可以看出最小入射角随着折射率的增大而增大。图中线段 QN 表示折射率 n 取值达到某值 n' 后, AB 面上任意角度入射的光线均在 AC 面上发生全反射。曲线与横坐标的交点表示折射率 n 的极小值 n'' ,当 n 小于该值时, AB 面上任意角度入射的

光线均能从AC面射出. 同样的, 在这种情况下存在出射光线向AC面法线上方偏折的情况, 其临界条件可以由DE光线恰好垂直入射到AC面时所对应的入射角来决定, 即

$$i_1 = \arcsin(n \sin A)$$

当三棱镜顶角A不变时, 折射率n对出射光线的影响规律可总结如下.

(1) 当 $n < \frac{1}{\sin A}$ 时, 以任意角度入射的光线均能从AC面射出, 当入射角满足 $i_1 > \arcsin(n \sin A)$ 时, 光线将向AC面过E点的法线上方偏折, 当 $i_1 < \arcsin(n \sin A)$ 时光线将偏向AC面过E点的法线下方;

(2) 当 $\frac{1}{\sin A} < n < \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}$ 时, 存在一个最小入射角 $i_{1\min}$, 只有当入射角大于 $i_{1\min}$ 时, AC面上才会有光线射出, 并且所有光线均向底面BC偏折;

(3) 当 $n > \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}$ 时, 以任意角度入射的光线均在AC面上发生全反射, 不会有光线从AC面射出.

3 不同参数下偏向角随入射角的变化情况

根据图1和图2, 由几何关系可得三棱镜AC面出射光线与AB面入射光线之间的偏向角 θ 之间的关系为

$$\theta = i_1 \pm r_2 - A \quad (7)$$

其中加号表示出射光线经AC面向法线下方偏折, 减号表示出射光线经AC面向法线上方偏折. 结合折射定律可进一步算得偏向角与入射角 i_1 、折射率n、顶角A的关系为

$$\theta = i_1 + \arcsin[\sin \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos A \sin i_1] - A \quad (8)$$

从上式可以看出当三棱镜的参数n和A一定时, 偏向角随着入射角的变化而变化.

图5是棱镜折射率 $n=1.5$ 时, 取不同的顶角A值, 偏向角 θ 与入射角 i_1 的关系曲线, 图6是棱镜顶角为 $A=60^\circ$ 时, 取不同的折射率n值, 偏向角 θ 与入射角 i_1 的关系曲线, $\theta-i_1$ 关系曲线上的点代表有出

射光线时偏向角和入射角的对应关系.

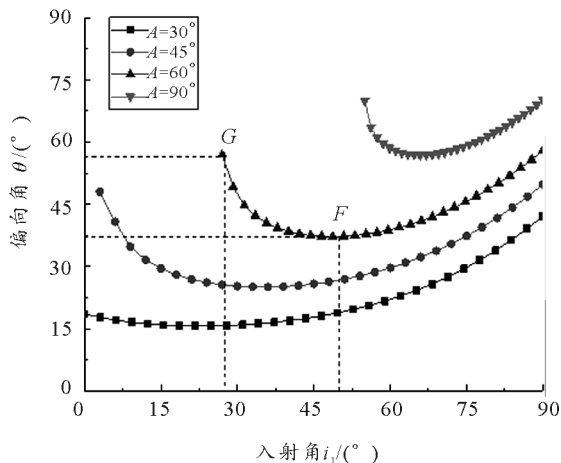


图5 $n=1.5$ 时不同A对应的 $\theta-i_1$ 关系曲线

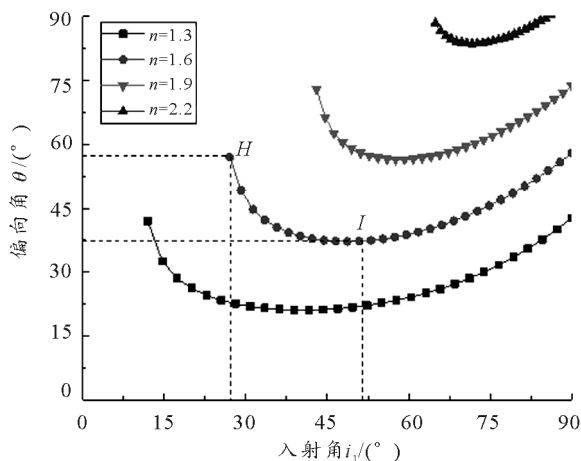


图6 $A=60^\circ$ 时不同n对应的 $\theta-i_1$ 的关系曲线

从图5和图6可以看出, 当棱镜折射率和顶角一定时, 偏向角随着入射角的增大呈现先减小后增大的趋势. 图中每条曲线最左端处对应的横坐标值为棱镜AC面有光线射出时需满足的最小入射角 $i_{1\min}$ 值. 图5中参数 $n=1.5, A=30^\circ$ 对应的曲线覆盖入射角全区段, 这表示当光以任意角度入射到以该参数制作的三棱镜上时, 光线均能从AC面射出, 不会发生全反射. 图5和图6中的 $\theta-i_1$ 关系曲线可以看出, 偏向角存在一个最小值 θ_{\min} , 在图5中当三棱镜的顶角A增加, 出现最小偏向角所对应的入射角也随之增加. 在图6中, 三棱镜顶角A一定的情况下, 棱镜的折射率越大, 出现最小偏向角时对应的光线入射角也会随之增加. 可计算出最小偏向角与三棱镜参数之间有如下关系

$$\theta_{\min} = 2 \left[\arcsin \left(n \sin \frac{A}{2} \right) - A \right] \quad (9)$$

以参数 $n = 1.5, A = 60^\circ$ 的三棱镜为例,代入式(4)和式(9)中,得到最小入射角和最小偏向角分别为 $i_{1\min} = 27.9^\circ$ 和 $\theta_{\min} = 37.2^\circ$. 此外,如果知道 $\theta - i_1$ 关系曲线图,也可以直接从 $\theta - i_1$ 关系曲线中确定最小入射角和最小偏向角的大小,曲线左端点处的横坐标代表最小入射角的值,曲线最低点处的纵坐标值即为最小偏向角的值. 如图5中 G 和 F 两点分别代表 $n = 1.5, A = 60^\circ$ 时的 $\theta - i_1$ 关系曲线上的左端点和最低点,通过定位可确定两点的坐标分别为: $G(27.5, 56.5), F(50.1, 37.5)$, 表示当棱镜参数取 $n = 1.5, A = 60^\circ$ 时,对应的最小入射角为 27.5° 、最小偏向角为 37.5° . 同样,在图6中当棱镜参数取 $n = 1.5, A = 60^\circ$ 时曲线所对应的最小入射角和最小偏向角(即 H, I 两点),得到 $i_{1\min} = 27.2^\circ, \theta_{\min} = 37.4^\circ$, 可见在误差允许范围内通过曲线关系图确定最小入射角和最小偏向角与公式得出的结果非常接近.

4 总结

本文分析了光束通过三棱镜的偏折情况,讨论了入射角、折射率、棱镜顶角对出射光线偏折方向的影响,指出三棱镜的折射率、顶角存在着极小值和极大值的取值范围,当棱镜折射率或顶角小于其极小值时,以任意角度入射的光线都能从三棱镜另一侧面射出;当折射率或顶角的取值处在极小值和极大

值范围之间,光线的入射角大于最小入射角时,才能在棱镜另一侧面得到出射光线,且最小入射角随着棱镜折射率和顶角的增大而增大;当折射率或顶角大于其极大值时,以任意角度入射的光线均发生全反射而不会有出射光线产生. 此外,讨论了光线偏向角与三棱镜参数的关系,光线偏向角随着入射角的增大呈现先减小后增大的变化规律,且最小偏向角随着棱镜折射率和顶角的增大而增大. 本文的分析和讨论有利于学生深入了解三棱镜对光线的转向情况,也能为三棱镜的设计提供参考.

参考文献

- 1 姚启钧. 光学教程(第5版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2014
- 2 顾菊观,钱惠国,陆静珠. 三棱镜最小入射角的理论和实验研究[J]. 应用光学, 2003(06):9~10
- 3 顾菊观. 三棱镜偏向角与棱镜顶角的关系[J]. 物理与工程, 2010(04):22~23
- 4 李轩,张雪. 光束经过三棱镜的偏向角分析[J]. 大学物理, 2018(04):64~67
- 5 郑宣连. 光线经三棱镜两次折射后一定向底面偏折吗?[J]. 物理教师, 2006(01):33~34
- 6 葛松华,唐亚明,朱国全,等. 三棱镜偏向角与入射角关系的研究[J]. 物理通报, 2008(07):12~13
- 7 何明伟. 关于三棱镜最小偏角的研究[J]. 兰州工业高等专科学校学报, 2007(02):15~17

Further Discussion on the Deflection Situation of Beam Passing Through Triple Prism

Qin Qinqin Hu Zhijuan

(Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234)

Abstract: In view of the doubts raised by undergraduate students about the deflection of a beam by a prism in undergraduate teaching, the deflection of a beam through a prism is analyzed in detail. The influence of incident angle, refractive index and the apex angle of a prism on the deflection direction of an outgoing ray is discussed. The range of the apex angle and refractive index of a prism and the range of the incidence angle on whether the rays can be outgoing or not are given. The relationship between the deflection angle of the beam and the parameters of the prism is further discussed, and a simple method to determine the minimum deflection angle is given.

Key words: prism; refractive index; incidence angle; vertex angle; deflection angle