对感生电场计算方法的探讨

李　燕

(雅安职业技术学院智信学院　四川 雅安　625000)

(收稿日期:2019-08-22)

摘　要:对于感生电场的计算问题,在大学电磁学教材中一般都是利用反证法证明螺线管管内外的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆.笔者在此利用解析法和类比法两种方法来证明螺线管管内外的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆,并在此基础上计算了 $\boldsymbol{E}_{感}$ 的大小,以供教学参考.

关键词:感生电场　解析法　类比法

1　引言

麦克斯韦提出:即使不存在导体回路,在变化的磁场周围也存在一个变化的电场,这个由变化的磁场激发的电场称为感生电场.感生场强 $\boldsymbol{E}_{感}$ 满足以下两个规律:

高斯定理

$$\oint\!\!\!\int_S \boldsymbol{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

所以,对任何闭合曲面 S,$\boldsymbol{E}_{感}$ 线是无头无尾的连续闭合曲线,$\boldsymbol{E}_{感}$ 场是无散场.

环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以,对任何闭合曲线 L,其中 S 是以 L 为边线的曲面,$\boldsymbol{E}_{感}$ 是涡旋场,不能引入电位概念.

一般情况下感生电场的计算较为复杂,在多数大学电磁学教材中利用环路定理讨论了少数具有对称性感生电场的问题,例如无限长螺线管的电流随时间作线性变化时其管内外的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 问题,在讨论此问题时,部分教材利用反证法证明了螺线管管内外的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆.如图 1 所示.

图 1 为一无限长螺线管的一段,C 为螺线管的横截面,L 为横截面圆周长,半径为 R.笔者在此利用解析法和类比法两种方法来证明 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与 C 同心的同心圆,并在此基础上计算 $\boldsymbol{E}_{感}$ 的大小,以供教学参考,如有不妥,敬请指正.

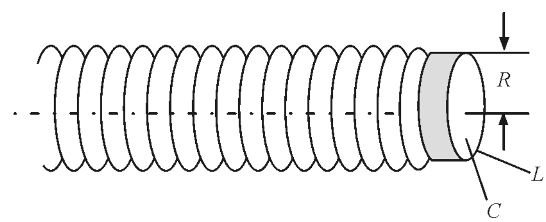

图 1　无限长螺线管

2　解析法

在柱坐标下,感生电场遵从的麦克斯韦方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{感} = \frac{\partial (rE_r)}{r\partial r} + \frac{\partial E_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{感} = \left(\frac{\partial E_z}{r\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left[\frac{\partial (rE_\theta)}{r\partial r} - \frac{\partial E_r}{r\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_z = -\frac{\partial B}{\partial t}\boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

因为螺线管为无限长且是对称的,所以对 r 相同、θ 和 z 不同的各点来说周围磁场的分布情况应该是一样的,也就是说感生电场大小不随 θ 和 z 变化,比较式(1) 两端有

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

可得

$$\frac{\partial (rE_r)}{r\partial r} = 0$$

从而有

作者简介:李燕(1970-),女,硕士,副教授,主要从事物理学教学研究.

$$E_r = 0$$

比较式(2) 两端有:e_θ 分量为零,$\dfrac{\partial E_z}{\partial r} = 0$,从而有 $E_z = 0$.

由此可见 $\boldsymbol{E}_{感}$ 既没有径向分量,也没有轴向分量,只有 θ 分量,所以 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆.下面还可根据式(2) 求出 E_θ 的大小.

在管内,即 $r < R$ 时,由式(2) 得

$$\frac{\partial(rE_\theta)}{r\partial r} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow rE_\theta = -\frac{r^2}{2}\frac{\partial B}{\partial t} + C_1$$

式中 $r = 0$ 时,E_θ 有限,$C_1 = 0$,所以有

$$E_\theta = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{3}$$

在管外,$r > R$ 时,$\dfrac{\partial B}{\partial t} = 0$,由式(2) 可得

$$\frac{\partial(rE_\theta)}{r\partial r} = 0 \Rightarrow rE_\theta = C_2 \tag{4}$$

当 $r = R$ 时,由式(3) 知

$$E_\theta = -\frac{R}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$$

故有

$$C_2 = -\frac{R^2}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$$

把 $C_2 = -\dfrac{R^2}{2}\dfrac{\partial B}{\partial t}$ 代入式(4) 得

$$E_\theta = -\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{5}$$

3　类比法

变化磁场激发的感生电场和传导电流激发的磁场都遵从高斯定理和环路定理,所以可作对比如下:

感生电场

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7}$$

电流的磁场

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8}$$

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{9}$$

比较式(6) 和式(8) 可知:感生电场中的 $-\dfrac{\partial B}{\partial t}$ 和电流的磁场中的 $\mu_0 j$ 相当,我们知道当传导电流的 $\boldsymbol{j}$ 分布对称,则其 $\boldsymbol{B}$ 线是垂直于轴线的同心圆.通过类比,若 $-\dfrac{\partial B}{\partial t}$ 的分布对称,则相应的感生电场的力线也应是一系列垂直于轴线的同心圆.因为通电长螺线管是对称的,所以其 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆.下面还可通过比较求出 $\boldsymbol{E}_{感}$ 的大小.

由长直圆柱形电流的磁场得

$r > R$ 时,有

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{10}$$

$r < R$ 时,有

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \tag{11}$$

在式(10) 和式(11) 中 $I = \pi R^2 j$,若把 $\mu_0 j$ 用 $-\dfrac{\partial B}{\partial t}$ 替换,则螺线管的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 有

$r > R$ 时,有

$$E_{感} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{12}$$

$r < R$ 时,有

$$E_{感} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{13}$$

值得注意的是使用类比法时应满足以下两个条件:首先,$\boldsymbol{j}$ 是电流密度,$\boldsymbol{B}$ 为空间分布均匀的交变电流激发的磁场.其次,只有在不考虑边界的无限空间中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}_{感}$ 的矢量场才能由它们的散度和旋度完全确定,否则还应给出边界条件.

4　结束语

通过以上分析可以看出,不管是教材上的反证法,还是本文中的解析法或类比法,当证明螺线管管内外的 $\boldsymbol{E}_{感}$ 线都是与螺线管轴线相垂直的同心圆时,除了利用已知条件的对称性外,还要利用 $\boldsymbol{E}_{感}$ 本身所遵从的定律,只有这样才能得出正确结论.

参 考 文 献

1　梁灿彬,秦光戎,梁竹健.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2004

2　基特尔,等.伯克利物理学教程电磁学卷[M].北京:机械工业出版社,2014

(下转第 30 页)

3　整体意识和局部意识的对立统一 有利于学生综合能力的培养

在许多问题处理的过程中，整体意识和局部意识的思路常常交替进行，不同的思路选用不同的方法，方法是解决问题的手段，方法的选择就是用整体意识和局部意识对问题的判断，而问题处理的过程就是学生能力培养和发展的过程.

【例 3】如图 5 所示，倾角为 θ，质量为 M 的斜面体静止在光滑水平面上. 现有质量为 m 的物块，以初速度 v_0 从斜面上某处沿斜面减速下滑. 已知物块与斜面体间的动摩擦因数为 μ，则在此过程中(　　)

A. 斜面体向左加速运动

B. 斜面体对物块做负功

C. 地面给斜面体的支持力等于 $(m+M)g$

D. 物块和斜面体构成的系统水平方向动量守恒

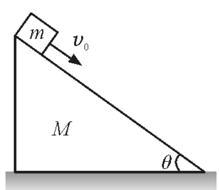

图 5　例 3 题图

解析：动量守恒问题涉及的是系统问题，是整体的问题，用整体意识处理，把 m 和 M 当作一个整体看待，整体水平方向合外力为零，则动量守恒，选项 D 正确. 斜面体对物块做功的问题，研究对象是物块，可尝试先用局部意识的思路处理，对物块考虑动能定理

$$W_G + W_F = \Delta E_{\mathrm{k}}$$

可知斜面体对物块做的功 W_F 是负值，选项 B 正确. 用整体意识的思路考虑 m 和 M 反而对选项 B 的正确与否较难判断. 对选项 A 和 C，如果用局部意识的解题思路，则对 M 的受力处理较为繁杂且费时，而把 m 和 M 看作一整体，用整体意识的思路考虑问题就简单很多. 对 m 和 M，水平方向由牛顿第二定律得

$$F_{合} = 0 = ma_{x1} + Ma_{x2}$$

a_{x1} 水平向左，则 M 的加速度 a_{x2} 水平向右，M 向右做加速运动，选项 A 错误. 对 m 和 M，竖直方向由牛顿第二定律得

$$F_{合} = N - (mg + Mg) = ma_{y1} + Ma_{y2}$$

且 $a_{y1} > 0$，$a_{y2} = 0$，则 $N > mg + Mg$，选项 C 错误.

小结：是用整体意识还是局部意识的解题思路处理问题，需要尝试和判断，在尝试和判断中寻求最佳的解题方法，而且两种解题思路常常交替使用，互为条件，互为结果.

4　总结

学生在分析和解决问题时，由于认知水平的限制，往往只注重物体或物理过程的局部，而忽略整体与局部相互依存，相互作用的关系，不能从整体着眼、从全局去思考问题. 有时则过于关注物体或物理过程的整体，而忽略从局部打开解题突破口的方法，面对题目，往往束手无策. 教师在教学过程中要做个有心人，在知识传授中，抓住契机对学生加以引导，对整体与局部的关系进行归纳和总结，让其成为学生思考和解决问题的一种习惯，最终使学生分析和解决问题的能力得到提高.

(上接第 27 页)

Discussion on Calculation Method of Induced Electric Field

Li Yan

(Ya'an Vocational and Technical College, Ya'an, Sichuan　625000)

Abstract: For the calculation of induced electric field, in the university electromagnetics teaching materials, the counter-evidence method is generally used to prove that the inner and outer lines of the solenoid tube are concentric gardens perpendicular to the axis of the solenoid. Here, the author uses the analytical method and the analogy method to prove that the inner and outer lines of the solenoid tube are concentric gardens perpendicular to the axis of the solenoid, and the size calculated on this basis is used for teaching reference.

Key words: induced electric field; analytical method; analogy method