竞赛与物理专题研修

单自由度振动系统频率求解方法探讨

—— 以 34 届全国中学生物理竞赛试题为例

鲁　斌　向　豪　冯子江

（浙江省余姚中学　浙江 宁波　315400）

（收稿日期：2019 - 11 - 14）

摘　要：振动频率的求解问题是中学生物理竞赛、大学生物理竞赛以及大学物理测试的常见考点. 重点讨论单自由度振动系统的求解方法. 运用受力分析、能量守恒、角动量定理、振动系统分解、推导单自由度保守体系自由振动通解等方法，给出了详尽的计算结果，并对结果做了必要的点评与说明.

关键词：振动频率　单自由度　小量近似

2017 年由重庆大学举办的第 34 届全国中学生物理竞赛中，预赛、复赛、决赛试题都考察了振动系统的频率求解问题. 此类问题不仅是高中竞赛考查的重点，也是大学物理课程教学的重点和难点.

1　试题概述和初步分析

【初试试题】 如图 1 所示，两劲度系数均为 k 的同样的轻弹性绳的上端固定在一水平面上，下端悬挂一质量为 m 的小物块. 平衡时，轻弹性绳与水平面的夹角为 α_0，弹性绳长度为 l_0. 现将小物块向下拉一段微小的距离后从静止释放，求物块做微小振动的频率.

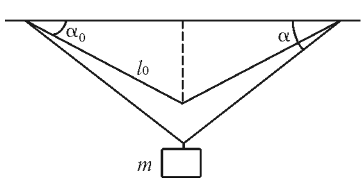

图 1　初试试题图

由于物体只能在竖直方向振动，故此题考查单自由度振动系统的频率求解问题. 复赛与决赛试题同样考察单自由度振动. 此类问题在大学物理的练习和试题中比较常见，诸多教师对其也做过相关的探讨[1].

我们以此题为例，总结此类问题的常用解法，并谈谈几种解法的区别和联系.

2　一般解法讨论

振动频率求解方法，一般是通过受力分析、能量微分等方法，得到简谐振动的微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+ky=0$$

其中 y 为物体离开平衡位置的微小距离. 由式中的 m，k 即可得到圆频率.

2.1　受力分析的一般解法

对于受力分析法，我们认为 α 和 y 均在有限范围内变化，分析得到某一位置的回复力 F 关于离开平衡位置位移 y 的表达式，然后考虑 y 为小量，进行合理近似，保留一阶小量. 只要证明 F 为线性回复力即可.

设原长为 L，现在长度为 l，与水平面所成的夹角为 α，如图 2 所示，则此时，物体受力

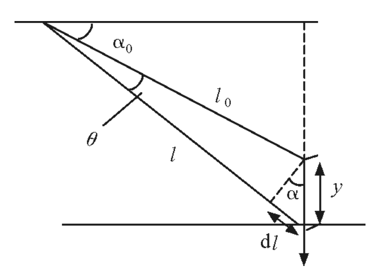

图 2　各物理量之间的关系

$$F=mg-2k(l-L)\sin\alpha \tag{1}$$

在平衡位置满足

$$mg=2k(l_0-L)\sin\alpha_0 \tag{2}$$

得到原长

$$L = l_0 - \frac{mg}{2k\sin\alpha_0} \tag{3}$$

根据几何关系，现有长度 l 可以表示为

$$l = \sqrt{(l_0\cos\alpha_0)^2 + (l_0\sin\alpha_0 + y)^2} \tag{4}$$

将式(2)～(4)代入式(1)，有

$$F = mg - 2k\left(l - l_0 + \frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\right)\frac{y + l_0\sin\alpha_0}{l} =$$

$$mg - 2k(y + l_0\sin\alpha_0) -$$

$$2k\left(\frac{mg}{2k\sin\alpha_0} - l_0\right)\frac{y + l_0\sin\alpha_0}{\sqrt{l_0^2 + y^2 + 2yl_0\sin\alpha_0}} \tag{5}$$

此为合力关于位移的关系．其中

$$\frac{y + l_0\sin\alpha_0}{\sqrt{l_0^2 + y^2 + 2yl_0\sin\alpha_0}} =$$

$$(y + l_0\sin\alpha_0)\, l_0^{-1}\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2} + \frac{2y\sin\alpha_0}{l_0}\right) - \frac{1}{2} \approx$$

$$(y + l_0\sin\alpha_0)\, l_0^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} - \frac{y\sin\alpha_0}{l_0}\right) \tag{6}$$

保留 y 的一阶小量，式(6)为

$$\frac{y\cos^2\alpha_0}{l_0} + \sin\alpha_0 \tag{7}$$

将式(7)代入式(5)，得到

$$F = mg - 2k(y + l_0\sin\alpha_0) -$$

$$2k\left(\frac{mg}{2k\sin\alpha_0} - l_0\right)\left(\frac{y\cos^2\alpha_0}{l_0} + \sin\alpha_0\right)$$

化简得

$$F = -\left(2k\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)y \tag{8}$$

根据牛顿第二定律，有

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \left(2k\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)y = 0 \tag{9}$$

由简谐振动微分方程得

$$\omega^2 = \frac{2k\sin^2\alpha_0 + \dfrac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}}{m} \tag{10}$$

系统微小振动的圆频率为

$$\omega = \left(\frac{2k\sin^2\alpha_0 + \dfrac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

物块微小振动的频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2k\sin^2\alpha_0 + \dfrac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

受力分析法的关键在于找到微小位移所对应的力的变化，但如果涉及的物理量较多，很容易出现小量近似舍去过多的情况．此种方法适合较明确、直接的振动系统．

2.2　能量的一般解法

能量求解的基础是保守系统的机械能守恒．振动系统中，先列出机械能守恒的表达式，接着将其各个变量对时间求导，求导结果为零．经过化简，便可得到简谐振动的微分方程．

振动系统的机械能由重力势能、弹性势能和动能组成．以平衡位置为零势能面，向下拉以微小位移 y 后，有

$$E = -mgy + 2\times\frac{1}{2}k\,(l - L)^2 +$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{11}$$

式(11)中，l 是 y 的函数，对其进行泰勒展开．由于能量解法需要对时间求导一次，y 的次方会低一阶，而我们的目标是得到线性回复力，故泰勒展开时涉及 y，y^2 的项均应保留，故应展开到第三项．即

$$l = \sqrt{(l_0\cos\alpha_0)^2 + (l_0\sin\alpha_0 + y)^2} =$$

$$l_0\left(1 + \frac{2yl_0\sin\alpha_0 + y^2}{l_0^2}\right)\frac{1}{2} =$$

$$l_0\left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\left(\frac{2yl_0\sin\alpha_0 + y^2}{l_0^2}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}\left(\frac{2yl_0\sin\alpha_0 + y^2}{l_0^2}\right)^2 + o(y^2)\right] \tag{12}$$

其中 $o(y^2)$ 表示 y^2 的高阶无穷小．略去 $o(y^2)$ 可得

$$l = l_0\left(1 + \frac{y^2\cos^2\alpha_0 + 2yl_0\sin\alpha_0}{2l_0^2}\right) \tag{13}$$

$$2\times\frac{1}{2}k\,(l - L)^2 =$$

$$k\left(l_0 - L + \frac{y^2\cos^2\alpha_0 + 2yl_0\sin\alpha_0}{2l_0}\right)^2 =$$

$$k\left(\frac{mg}{2k\sin\alpha_0} + \frac{y^2\cos^2\alpha_0 + 2yl_0\sin\alpha_0}{2l_0}\right)^2 \approx$$

$$\frac{m^2g^2}{4k\sin^2\alpha_0} + mgy + k\sin^2\alpha_0\, y^2 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{2l_0\sin\alpha_0}y^2 \tag{14}$$

将式(14)代入式(11)，有

$$E = \frac{m^2g^2}{4k\sin^2\alpha_0} + \left(k\sin^2\alpha_0 + \frac{mg\cos^2\alpha_0}{2l_0\sin\alpha_0}\right)y^2 +$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{15}$$

将(15)式对时间求导,消去$\frac{dy}{dt}$项,得到

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\left(2k\sin^2\alpha_0+\frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}\right)y=0$$

即可求解.

3　不同角度的探讨

受力分析和能量微分是解决振动系统的常用方法.接下来,我们从不同角度讨论单自由度的振动问题.

3.1　角动量定理

将此振动系统看做转动系统,便可运用转动定律求解.在平衡位置时,弹簧与水平方向的夹角为α_0,振动的某一时刻,夹角为α.角度的变化为θ(如图2所示)

$$\theta=\alpha-\alpha_0 \tag{16}$$

由几何关系得

$$l=\frac{l_0\cos\alpha_0}{\cos\alpha}=\frac{l_0\cos\alpha_0}{\cos(\alpha_0+\theta)} \tag{17}$$

如图3所示,以绳子的悬挂点A为参考点,其受到的力矩有自身的重力矩和右侧弹簧的拉力矩.取垂直纸面向里为正.重力矩为

$$M_G=mgl_0\cos\alpha_0$$

由于左侧弹力通过A点,不产生力矩,右侧弹力方向沿右侧弹簧,与左侧弹簧所成的角度为2α,如图3所示.

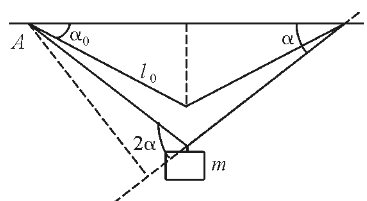

图3　角度的表示

则物体所受到的弹力矩为

$$M_F=-\kappa(l-L)l\sin 2\alpha$$

根据小物块绕A点转动,由角动量定理

$$mgl_0\cos\alpha_0-k(l-L)l\sin 2\alpha=\frac{d}{dt}\left(I_A\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{18}$$

其中绕A点的转动惯量为

$$I_A=ml^2 \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\left(I_A\frac{d\theta}{dt}\right)=I_A\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{dI_A}{dt}\frac{d\theta}{dt} \tag{20}$$

将式(17)、(19)代入式(20),有

$$\frac{dI_A}{dt}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{l_0\cos\alpha_0\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

为θ的高阶小量可以忽略,故

$$\frac{d}{dt}\left(I_A\frac{d\theta}{dt}\right)=I_A\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{21}$$

将式(3)、(19)、(21)代入式(18),等式两边同除以l^2,有

$$\frac{mgl_0\cos\alpha_0}{l^2}-k\sin(2\alpha_0+2\theta)+\frac{k}{l}l_0\sin(2\alpha_0+2\theta)-\frac{k}{l}\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\sin(2\alpha_0+2\theta)=m\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{22}$$

进行求解前,先给出几个函数的近似式

$$\cos^2(\alpha_0+\theta)=(\cos\alpha_0\cos\theta-\sin\alpha_0\sin\theta)^2=$$
$$\cos^2\alpha_0\cos^2\theta+\sin^2\alpha_0\sin^2\theta-2\cos\alpha_0\cos\theta\sin\alpha_0\sin\theta=$$
$$\cos^2\alpha_0-2\cos\alpha_0\sin\alpha_0\theta\sin(2\alpha_0+2\theta)=$$
$$\sin 2\alpha_0\cos 2\theta+\cos 2\alpha_0\sin 2\theta\approx$$
$$\sin 2\alpha_0+2\theta\cos 2\alpha_0\cos(\alpha_0+\theta)=$$
$$\cos\alpha_0\cos\theta-\sin\alpha_0\sin\theta\approx$$
$$\cos\alpha_0-\theta\sin\alpha_0\sin(\alpha_0+\theta)=$$
$$\sin\alpha_0\cos\theta-\cos\alpha_0\sin\theta\approx\sin\alpha_0-\theta\cos\alpha_0$$

第一项

$$\frac{mgl_0\cos\alpha_0}{l^2}=\frac{mgl_0\cos\alpha_0}{\left[\frac{l_0\cos\alpha_0}{\cos(\alpha_0+\theta)}\right]^2}\approx\frac{mg}{l_0}(\cos\alpha_0-2\sin\alpha_0\theta) \tag{23}$$

第二项

$$-k\sin(2\alpha_0+2\theta)\approx-k(\sin 2\alpha_0+2\theta\cos 2\alpha_0) \tag{24}$$

第三项

$$\frac{k}{l}l_0\sin(2\alpha_0+2\theta)=\frac{k\cos(\alpha_0+\theta)\sin(2\alpha_0+2\theta)}{\cos\alpha_0}\approx\frac{k(\cos\alpha_0-\theta\sin\alpha_0)(\sin 2\alpha_0+2\theta\cos 2\alpha_0)}{\cos\alpha_0}\approx$$
$$\frac{k(\cos\alpha_0\sin 2\alpha_0-\theta\sin\alpha_0\sin 2\alpha_0+\cos\alpha_0 2\theta\cos 2\alpha_0)}{\cos\alpha_0}$$
$$k(\sin 2\alpha_0-2\theta\sin^2\alpha_0+2\theta\cos 2\alpha_0) \tag{25}$$

第四项

$$-\frac{k}{l}\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\sin(2\alpha_0+2\theta)=$$

$$-\frac{mg\cos(\alpha_0+\theta)}{2l_0\sin\alpha_0\cos\alpha_0}\sin(2\alpha_0+2\theta)\approx$$

$$-\frac{mg(\cos\alpha_0-\theta\sin\alpha_0)(\sin 2\alpha_0+2\theta\cos 2\alpha_0)}{2l_0\sin\alpha_0\cos\alpha_0}\approx$$

$$-\frac{mg(\cos\alpha_0\sin 2\alpha_0-\theta\sin\alpha_0\sin 2\alpha_0+\cos\alpha_0 2\theta\cos 2\alpha_0)}{2l_0\sin\alpha_0\cos\alpha_0}\approx$$

$$-\frac{mg}{l_0}\left(\cos\alpha_0-\theta\sin\alpha_0+\frac{\theta\cos 2\alpha_0}{\sin\alpha_0}\right)\quad(26)$$

将式(23)～(26)代入式(21),化简即可得到

$$-\left(\frac{mg\cos^2\alpha_0}{l_0\sin\alpha_0}+2k\sin^2\alpha_0\right)\theta=m\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\quad(27)$$

此法求解的关键在于选定参考点后,列出物体所受精确的力矩表达式,配合角动量定理求解即可.在求解过程中也应注意,代入的 I 应是针对环绕点的转动惯量,并且 I 为变量,代入的 M 也应是针对环绕点的合力矩.

3.2　将振动系统分解

将物块的上下振动看做不同振动方向的合振动,且各个振动方向分振动的频率必然一致,故只要得到沿着一侧的牛顿二定律即可求解.

将重力沿一侧分解,并计入弹力,得到动力学方程

$$-k(l-L)+mg\sin\alpha+k(l-L)\cos 2\alpha=$$
$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}-l\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\quad(28)$$

由于

$$l\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2=l\left[\frac{\mathrm{d}(\alpha_0+\theta)}{\mathrm{d}t}\right]^2=l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

此为$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$的高阶无穷小,可以忽略.

则式(28)为

$$mg\sin\alpha+k(l-L)(\cos 2\alpha-1)=m\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\quad(29)$$

第一项

$$mg\sin\alpha=mg(\sin\alpha_0-\theta\cos\alpha_0)\quad(30)$$

第二项

$$k(l-L)(\cos 2\alpha-1)=$$
$$-k\left(l-l_0+\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\right)2\sin^2(\alpha_0+\theta)=$$
$$-2k\left[\frac{l_0\cos\alpha_0}{\cos(\alpha_0+\theta)}-l_0+\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\right]$$
$$(\sin\alpha_0-\theta\cos\alpha_0)^2=$$
$$-2k\left[l_0\cos\alpha_0\cos\alpha_0-1(1-\theta\tan\alpha_0)-1-\right.$$
$$\left.l_0+\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\right]\times$$
$$(\sin^2\alpha_0-2\theta\sin\alpha_0\cos\alpha_0)=$$
$$-2k\left[l_0\cos\alpha_0\cos\alpha_0-1(1-\theta\tan\alpha_0)-1-\right.$$
$$\left.l_0+\frac{mg}{2k\sin\alpha_0}\right]\times(\sin^2\alpha_0-2\theta\sin\alpha_0\cos\alpha_0)=$$
$$-2kl_0\tan\alpha_0\sin^2\alpha_0-mg(\sin\alpha_0-2\theta\cos\alpha_0)\quad(31)$$

第三项$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=l_0\cos\alpha_0\frac{\mathrm{d}\cos^{-1}(\alpha_0+\theta)}{\mathrm{d}t}=$$
$$\frac{l_0\cos\alpha_0\sin(\alpha_0+\theta)}{\cos(\alpha_0+\theta)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

接下来再求一次导数,由于其他项求导都会出现$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$,舍去.故只剩下一项

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}=\frac{l_0\cos\alpha_0\sin(\alpha_0+\theta)}{\cos^2(\alpha_0+\theta)}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\approx$$
$$l_0\tan\alpha_0\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\quad(32)$$

将式(30)～(32)代入式(29)可得

$$-(2kl_0\tan\alpha_0\sin^2\alpha_0+mg\cos\alpha_0)\theta=$$
$$ml_0\tan\alpha_0\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

化简整理后即可得到式(27).此解法益处在于小量只用展开到一阶,计算较为简单.

4　结束语

在振动问题的求解中,运用受力分析、能量微元是解决系统振动频率问题的一般方法,最终都要证明回复力为线性回复力.在受力分析时,应给出最精确的受力表达式,然后逐步代入,并保留一阶小量,进而求解.在能量求解中,应给出在保守场中的能量守恒表达式,求导后逐步代入参数求解.从另外的角度,将直线运动系统看做转动系统,借用角动量定理求解;根据运动的合成规律将振动系统分解等方法,也都能很好地解决此类问题.解决振动问题的分析方法多种多样,没有优劣之分,不同的问题可运用不同的方法解决.

参 考 文 献

1　陈奎孚.单自由度振系固有频率不含弹簧静变形的充要条件[J].大学物理,2017(11):18～24