

两体对心碰撞后物体速度范围的确定和求解

赵文浩

(陕西师范大学物理学与信息技术学院 陕西 西安 710119;

宁强县天津高级中学 陕西 汉中 724400)

杨荣富 曹伟

(宁强县天津高级中学 陕西 汉中 724400)

(收稿日期:2019-10-23)

摘要:两体对心碰撞后,物体速度取值的求解是对动量考查的一个重要形式,同时对学生也是一个难点问题.文章通过引入恢复系数在实验室参考系下对碰撞过程进行分析,确定出两体对心碰撞后物体速度介于弹性碰撞和完全非弹性碰撞的碰后速度之间;并在质心参考系下得出弹性碰撞后物体速度的简单计算方法,简化了对两体碰后速度的确定和求解过程.

关键词:碰后速度 弹性碰撞 完全非弹性碰撞 实验室参考系 质心参考系

在高中物理教学中,碰撞模型是考查学生运用动量知识解决实际问题的经典模型.对于碰撞后两物体速度范围的确定和求解是对碰撞类问题考察的一个重要途径,这类问题往往以选择题的形式呈现.在处理该类问题时,通常依据物体碰撞前后动量守恒、机械能不增加和速度合理3个制约关系来排除错误选项^[1,2].这种处理方法虽然有利于学生深刻理解碰撞前后系统动量、机械能和速度3个物理量的关系,但是判断的计算过程过于繁杂,同时对于碰撞后两物体的速度范围也没有得到实质性求解.另外文献[3]的函数解析和文献[4]的图像法,虽然给出了特定条件下碰撞后物体速度范围的求解方法,但不具有普适性,同时在求解时都面临复杂的数学计算.下面笔者通过在两种参考系下的碰撞过程分析给出碰撞后物体速度范围的简单计算方法.

1 实验室参考系下的碰撞过程分析

如图1所示,两个质量为 m_1 和 m_2 的小球A和B分别以速度 v_1, v_2 同向运动并发生对心碰撞,碰撞后小球A和B的速度分别为 v'_1, v'_2 .

分析:根据碰撞过程中动量守恒

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

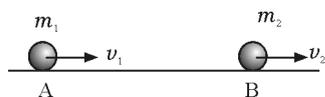


图1 同向对心碰撞

引入恢复系数 $e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$ ($0 \leq e \leq 1$)^[5], 并

与式(1)联立,则

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

令 $v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, $\kappa = \frac{v_2 - v_1}{m_1 + m_2}$, 则两球碰撞后速度

$$v'_1 = v_c + \kappa m_2 e \quad (4)$$

$$v'_2 = v_c - \kappa m_1 e \quad (5)$$

根据表达式(4)、(5),在碰撞初始条件(质量和碰撞前速度)确定的情况下,两物体碰撞后物体速度大小取决于物体的恢复系数,并与恢复系数呈一次函数关系.当物体发生弹性碰撞($e=1$)和完全非弹性碰撞($e=0$)时,物体碰撞后速度取得最值;在发生非弹性碰撞时,物体碰撞后的速度介于这两种极

限碰撞的碰后速度之间,即在两个物体发生一维对心碰撞后,物体碰撞后的速度介于弹性碰撞和完全非弹性碰撞这两种极限碰撞的碰后速度之间。

式(4)、(5)表明,两物体碰撞后速度只是在弹性碰撞和完全非弹性碰撞时取得最值,并非弹性碰撞后速度最大,完全非弹性碰撞后速度最小,消除了部分学生对物体碰撞后速度最值的错误认识。

2 质心参考系下的弹性碰撞过程分析

上文在实验室参考系下,通过引入恢复系数求出两体对心碰撞后速度介于弹性碰撞和完全非弹性碰撞这两种极限碰撞的碰后速度之间.但对于弹性碰撞速度的求解过程稍显繁杂,下文笔者在质心参考系中对物体碰撞后速度进行分析求解。

分析:小球 A, B 弹性碰撞过程中机械能守恒和动量守恒的表达式为

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (6)$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad (7)$$

联立式(6)和式(7),得

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \quad (8)$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (9)$$

视小球 A 和 B 为质点,设 A 和 B 质点系的质心

速度为 v_c , 根据 $\sum_{i=1}^n m_i v_i = v_c \sum_{i=1}^n m_i$ 得^[6]

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \quad (10)$$

则

$$v_c = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

选取质点系 A, B 的质心为参考点建立质心参考系,用 v_A, v_B 表示小球 A, B 在质心参考系中碰撞前的速度,用 v_A', v_B' 表示小球 A, B 在质心参考系中碰撞后的速度,则

$$v_A = v_1 - v_c = \frac{m_2v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

$$v_B = v_2 - v_c = \frac{m_1v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

联立表达式(8)、(9)和式(11)得

$$v_A' = v_1' - v_c = -\frac{m_2v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (14)$$

$$v_B' = v_2' - v_c = -\frac{m_1v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

联立式(12)~(15)得

$$v_A' = -v_A \quad v_B' = -v_B \quad (16)$$

即

$$v_1' - v_c = -(v_1 - v_c) \quad (17)$$

$$v_2' - v_c = -(v_2 - v_c) \quad (18)$$

即在质心参考系中,两个物体发生弹性对心碰撞后,各物体碰撞前和碰撞后的速度大小相等方向相反。

3 两体对心碰撞后速度范围的确定及求解方法

对于两物体对心碰撞后的速度范围,我们可以通过上文两种参考系下的分析结果进行确定和求解。

解法一: 求出两体弹性碰撞和完全非弹性碰撞两种极限碰撞条件下的临界速度,然后对这两个临界速度取闭合区间,即为物体碰撞后速度的取值范围。

解法二: 求出两体完全非弹性碰撞后的速度,再利用 $v_1' - v_c = -(v_1 - v_c)$ 和 $v_2' - v_c = -(v_2 - v_c)$ 即可快速求出弹性碰撞后的速度,然后对这两种速度取闭合区间,即为物体碰后速度的取值范围。

【例题】 小球 1 和小球 2 在光滑的水平面上沿同一直线、同一方向运动, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $v_1 = 6 \text{ m/s}$, $v_2 = 2 \text{ m/s}$, 当小球 1 追上小球 2 并发生碰撞后, 小球 1 和小球 2 速度的可能值是(取两球碰撞前的运动方向为正)()

A. $v_1' = 5 \text{ m/s}$ $v_2' = 2.5 \text{ m/s}$

B. $v_1' = 2 \text{ m/s}$ $v_2' = 4 \text{ m/s}$

C. $v_1' = -4 \text{ m/s}$ $v_2' = 7 \text{ m/s}$

D. $v_1' = 7 \text{ m/s}$ $v_2' = 1.5 \text{ m/s}$

解法一: 当两小球发生弹性碰撞时根据动量守恒得

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

根据机械能守恒得

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

则 $v_1' = \frac{2}{3} \text{ m/s}$ $v_2' = \frac{14}{3} \text{ m/s}$

当两物体发生完全非弹性碰撞时

根据动量守恒得

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c$$

$$\text{则} \quad v_c = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

$$\text{小球 1 的速度范围} \quad \frac{2}{3} \text{ m/s} \leq v'_1 \leq \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

$$\text{小球 2 的速度范围} \quad \frac{10}{3} \text{ m/s} \leq v'_2 \leq \frac{14}{3} \text{ m/s}$$

解法二: 当两小球发生完全非弹性碰撞时
根据动量守恒得

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c$$

$$\text{则} \quad v_c = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

小球 1 碰撞过程满足 $v'_1 - v_c = -(v_1 - v_c)$, 则

$$v'_1 = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

即小球 1 碰撞后的速度范围 $\frac{2}{3} \text{ m/s} \leq v'_1 \leq \frac{10}{3} \text{ m/s}$.

小球 2 碰撞过程满足 $v'_2 - v_c = -(v_2 - v_c)$, 则

$$v'_2 = \frac{14}{3} \text{ m/s}$$

即小球 2 碰撞后的速度范围 $\frac{10}{3} \text{ m/s} \leq v'_2 \leq \frac{14}{3} \text{ m/s}$.

所以选项 B 正确, 通过这两种方法的使用不仅能简单快速处理该问题, 还能计算出两球的碰后速度范围, 使得物体碰后速度得到真实求解. 同时在本例题中小球 1 发生弹性碰撞后速度取得最小值, 而发生完全非弹性碰撞后速度取得最大值, 充分说明在发生弹性碰撞和完全非弹性碰撞时, 物体碰撞后

的速度只是取得最值, 并不是弹性碰撞后物体速度最大, 完全非弹性碰撞后物体速度最小, 有效地消除学生对碰撞后物体速度取值的错误认识.

4 结束语

通过在两种参考系下的碰撞过程分析, 对两物体碰撞后的速度范围实现界定和求解, 简化了处理过程, 降低求解难度, 弥补了以碰撞三要素为依据的排除法在求解这类问题中的不足. 对两体碰撞后速度范围的真实求解, 消除了学生对弹性碰撞后物体速度最大、完全非弹性碰撞后物体速度最小的错误认识, 进一步加深了学生对碰撞过程的理解和认识.

参考文献

- 1 贾军朝. 求解碰撞类问题的三要点[J]. 物理教师, 2008, 29(1):11
- 2 徐成华. 碰撞过程中的三个关系[J]. 物理教学探讨, 2014, 32(2):41
- 3 岳巍巍. 二次函数法分析对心碰撞[J]. 物理教学, 2016(3):16 ~ 17
- 4 李叶贤. 碰撞后速度大小范围问题的一种图像解法[J]. 物理通报, 2014(8):46 ~ 47
- 5 贺西平, 王成会, 边小兵, 等. 碰撞问题的速度矩阵表达和能量损失及传递率分析[J]. 物理通报, 2017(11):27 ~ 29, 34
- 6 周衍柏. 理论力学教程(第3版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009. 87 ~ 88

Determination and Solution on Velocity Range after Central Collision of Two Objects

Zhao Wenhao

(School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, xi'an, Shaanxi 710119;
Tianjin High School of Ningqiang, Hanzhong, Shaanxi 724400)

Yang Rongfu Cao Wei

(Tianjin High School of Ningqiang, Hanzhong, Shaanxi 724400)

Abstract: The solution of objects velocity after central collision is an important way to investigate momentum, which is also a difficult problem for students. In this paper, by means of introducing the restitution coefficient to the analysis of the collision process in the laboratory reference system, the velocity of two objects after central collision is determined to range from the velocity after elastic collision to the velocity after completely inelastic collision. Besides, a simple method for calculating the velocity of the objects after elastic collision is obtained in the mass core reference system, which simplifies the determination and solving process of the velocity of the two objects after collision.

Key words: velocity after collision; elastic collision; completely inelastic collision; laboratory reference system; mass core reference system