



一道轻杆问题的正确解法与其引发的思考

王文娟

(北京师范大学物理学系 北京 100875)

(收稿日期:2020-02-05)

摘要:从一道轻杆模型问题出发,定性分析了轻杆系统的物理模型受力情况与运动过程,纠正了目前流行的错误解法;基于受力分析与机械能守恒定律,提出本题的正确解法,并分别定性、定量求解.最后,结合新课标物理核心素养,提出一些对于物理教育的思考,供物理教学工作参考.

关键词:轻杆模型 解法 刚体转动 临界角 核心素养

1 引言

物理学的研究,需要科学的方法作指导.学生在解决物理问题时,需要构建合理的物理模型,采用相关的物理方法,分析模型的物理运动过程.

轻杆模型是高中物理力学问题中的常见模型.现阶段的高中物理教学中,只讨论将物体简化成质点后的质点平动问题,暂不讨论转动问题.这使得高中阶段的绝大多数轻杆问题都对“轻杆”提出“忽略质量”的要求,使得杆的转动惯量恒为零,以期规避讨论杆的转动,便于高中学生求解^[1].然而,多数教师、学生在求解轻杆问题时,由于习惯性地忽略轻杆的质量,忽视了轻杆可能存在的转动,甚至仅将这一模型视作质点平动问题进行求解,违背了这一模型的物理运动规律.

本文以2017年11月四川省绵阳市高三第一次诊断性考试(理科综合)第17题为例.通过与给出的标准答案对比,笔者认为该题选项C、D解析存在漏洞,不利于培养学生的物理思维.因此,本文将纠正其广为流传的错误解法,给出这一问题的正确解.

2 题目

【例题】如图1所示,光滑的小球A和B通过轻杆相连,靠在竖直墙和水平地面上,从图示位置由静

止释放,则()

- A. 轻杆对小球A始终不做功
- B. 轻杆对小球B做的总功为零
- C. 轻杆对小球A先做正功后做负功
- D. 轻杆对小球B先做正功后做负功

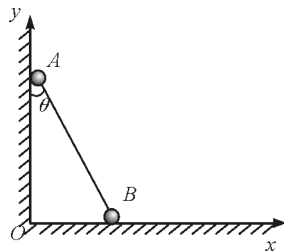


图1 例题题图

3 错解辨析

本题主要考察学生对受力分析、机械能守恒定律、运动学规律的应用能力.释放轻杆后,轻杆会顺势倒下.选项C、D的错解如下.

错解:当轻杆一直沿墙壁下滑时,A球速度沿y轴负向,B球速度沿x轴正向.将A、B两球速度分别分解为沿杆方向和垂直于杆方向,即

$$v_{A\parallel} = v_A \cos \theta \quad v_{A\perp} = v_A \sin \theta$$

$$v_{B\parallel} = v_B \sin \theta \quad v_{B\perp} = v_B \cos \theta$$

由于轻杆是刚性杆,不可伸缩,故沿杆方向两球共速,即 $v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$. 则可知:当 θ 达到 45° 时,

B 的速度将减小,轻杆开始对其做负功; A 的速度将增大,轻杆开始对其做正功,故 C 错误,D 正确.

纵观错解,虽然巧妙运用了轻杆作为刚性物体的不可伸缩性,列出两球的速度关系式,看似严谨.但当 θ 达到 45° 时,只需保证 $v_B < v_A$ 这一相对关系恒成立,就可以使等式 $v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$ 成立.单纯减小 B 的速度,是使等式 $v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$ 成立的充分非必要条件.综上所述, $\theta = 45^\circ$ 并不一定是轻杆对两球做功的正负发生改变的临界角.

4 模型运动分析

轻杆对物体做功的正负发生改变,也即轻杆对物体的作用力 T 的方向反向.那么,轻杆做功正负变化的临界角是否存在呢?如何对两球的物理运动过程进行精确的描述呢?

对两个小球进行受力分析,如图 2(a) 所示. G_A , G_B 为两球重力, T 为杆对球的弹力, N_A 为墙面对 A 球的支持力, N_B 为地面对 B 球的支持力.当轻杆开始下滑后, θ 角增大,轻杆 A 端沿墙面滑下, B 端沿地面滑动, A 球所受合力 F_A 沿 y 轴方向, B 球所受合力 F_B 沿 x 轴方向.弹力 T 对 A 球做负功,对 B 球做正功,使 v_B 持续增大.由

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$$

可得

$$v_A = v_B \tan \theta$$

即随着 θ 的增大, v_A 也持续增大.

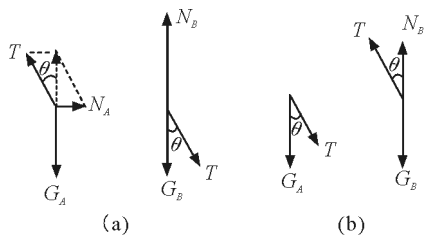


图 2 两小球受力分析

大胆假设临界角 θ_0 存在. $\theta = \theta_0$ 后,弹力 T 反向,如图 2(b) 所示,轻杆做功的正负也发生改变, T 对 A 球开始做正功,对 B 球开始做负功,即可证明选项 D 正确.同时, F_A 将会有 x 轴正向分量,使 A 球在 x 轴正向、 y 轴负向都拥有速度,轻杆 A 端不再单纯沿墙下滑,而是离开墙面,支持力 N_A 消失; F_B 将会

拥有 x 轴负向分量,使 B 球在 x 平面上出现减速运动.

那么,只要能够直接证明弹力 T 的方向在轻杆下滑过程中可反向,或证明使弹力 T 反向的临界角 θ_0 存在,即可证得,在轻杆下滑直至落地前的全过程中, v_A 一直增大, v_B 先增大后减小,在临界角处取得最大值;即可得出轻杆对两球做功正负的变化情况,最终得出题目选项 C 错误、选项 D 正确的结论.

5 正确解答

笔者将分别定性和定量分析.

解法 1(定性): 杆还未离开墙面时,在 B 球的静止参考系 O' 系分析系统的运动. B 球合力 $F'_B = 0$, 速度 $v'_B = 0$; A 球的合力与速度示意图如图 3 所示, F' 为 A 球所受惯性力,大小与 N_A 等同,即 O' 系中 A 球合力 $F'_A = G_A + T$; v'_A 为 A 球在 O' 系中的表征速度,速度方向垂直于杆.相当于在 O' 系中, A 球以 B 球为圆心,以杆长 l 为半径,围绕 B 球做圆周运动,所需向心力 $F_{\text{向}} = \frac{m_A v_A'^2}{l}$. 又由前文受力分析得, $\theta < \theta_0$ 时, v_A, v_B 随着 θ 增大而增大,故 v'_A 也增大, $F_{\text{向}}$ 会持续增大.当 v'_A 增大到一定程度, T 的方向将会反向,与 A 的重力一同构成 A 所需的向心力.证毕.

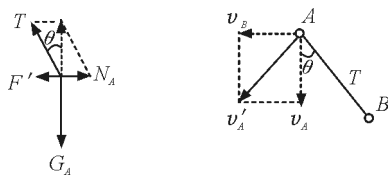


图 3 B 球静止参考系中 A 球的合力与速度示意图

解法 2(定量): 讨论简化情况.设 A, B 球质量为 m ,轻杆长 l ,初始时刻轻杆与墙壁夹角为 α .由机械能守恒定律,得

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = m g l (\cos \alpha - \cos \theta)$$

沿杆方向,杆长不伸缩

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$$

O' 系中: A 球速度

$$v'_A = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{2 g l (\cos \alpha - \cos \theta)}$$

向心加速度

$$a'_{\parallel} = \frac{v_A'^2}{l} = 2 g (\cos \alpha - \cos \theta)$$

临界状态 $\theta = \theta_0$ 时, $T = 0$, A 球合力 $F'_A = G_A$, 故有

$$a'_{\parallel} = g \cos \theta_0$$

可得临界角

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3} \cos \alpha\right)$$

故临界角 θ_0 存在, 大小与初始时刻轻杆的倾斜角 α 有关. 且仅当 $\frac{2}{3} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 才有错解中的 $\theta_0 = 45^\circ$. 证毕.

解法 3(定量): 讨论简化情况. 设 A, B 球质量为 m , 轻杆长为 l , 初始时刻轻杆与墙壁夹角 α .

由机械能守恒定律, 得

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = m g l (\cos \alpha - \cos \theta)$$

沿杆方向, 杆长不伸缩

$$v_A \cos \theta = v_B \sin \theta$$

联立上述两式得

$$v_B^2 = 2 g l (\cos \alpha - \cos \theta) \cos^2 \theta$$

有

$$\frac{d v_B^2}{d \theta} = g l \sin 2 \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \alpha)$$

若存在 θ 使 $\frac{d v_B^2}{d \theta} = 0$, 则 v_B 存在极值; 若 v_B 存在极

大值, 则临界角存在. 当 $\theta = 0^\circ, 90^\circ, \arccos\left(\frac{2}{3} \cos \alpha\right)$ 时,

满足 $\frac{d v_B^2}{d \theta} = 0$. 舍去前两个极小值解 ($\theta = 0^\circ$ 时轻杆紧贴墙面, $\theta = 90^\circ$ 时轻杆已完全落地), 可得临界角

$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3} \cos \alpha\right)$. 证毕.

6 总结与展望

本题选项 A, B 较易判断. 在考场上, 考生只需正确分析模型运动, 便可以通过排除法排除, 在选项 C, D 中得出答案, 足以应付考场作答. 但如果对本题仅仅只是应付了事, 不仔细分析模型的运动规律, 对于学生物理核心素养的培养将弊大于利; 本题错误解答的广为流传, 也暴露了当下物理教学的部分问题, 以下问题值得引起物理教育工作者的重视.

(1)“为解题而解题”, 忽视核心素养的培养

物理核心素养, 是学生在接受物理学习时, 潜移默化形成的正确价值观念、必备品格和关键能力^[2]. 以本题为例, 错解虽然巧妙运用了轻杆的速度关系, 但却忽视了运动状态发生改变的原因——力, 忽视了物理学的这一支柱, 完全没有对系统进行受力分析, 进而导致错解的发生. 在分析任何物体的运动状态前, 我们都需要仔细分析物体的受力情况. 在高中物理简化后的质点运动学问题中, 我们只需要分析力的大小与方向, 就能判断质点的平动是否发生变化; 但在真实的物理场景中, 受力分析变得更为重要: 我们不仅需要判断物体是否会发生平动, 还需要分析受力点的位置, 判断物体是否受转矩影响, 发生转动^[1]. 受力分析在物理学中的地位可见一斑. 作为教育工作者, 我们有义务培养学生正确的物理观念, 不能让错解带偏学生解决物理问题的思维方式.

(2) 局限于高中课本, 较少主动探究模型背后的物理本质

新课标指出, 通过高中物理课程的学习, 学生应能运用科学思维与方法, 建构合适的物理模型, 从定性和定量两个方面对模型的物理问题进行推理, 找到规律并得出结论^[2]. 本题的轻杆下滑模型是一个非常贴近实际生活的模型. 生活中与此最接近的模型, 便是将一只笔用同样方式立在桌与墙之间, 观察笔的自然下滑过程. 分析时, 可将笔视作一个质量均匀分布的长条刚体, 进而可以研究笔的平动与转动. 这是一个带领学生主动跳出高中物理课本范畴、了解刚体转动问题的好机会, 但碍于高中教学环境所限, 绝大多数教师并未将此纳入教学环节, 错过了增长学生见识的时机. 教师有义务在完成规定的教学任务的同时, 带领学生进行科学探究活动, 拓宽学生的知识面, 让学生的物理素养得到进一步的提升.

参考文献

- 1 卢圣治. 理论力学基本教程(第2版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2009
- 2 中华人民共和国教育部. 普通高中课程方案和全部学科课程标准(2017年版)[S]. 北京: 中华人民共和国教育部, 2018